* القسم: رياضيات
* الفصل: الأول
* السنة: الثانية
* المادة: تحليل (3)

* المحاضرة: الأولى (عملي)

$\{a_n\}_{n\geq 1}$

تعريف المتتالية: هي تطبيق $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \longrightarrow f(n) = a_n$

$a_n \leq a_{n+1}$

متتالية متزايدة $\{1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, \ldots\}$

$a_n < a_{n+1}$

متتالية متزايدة تماماً $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$a_n \geq a_{n+1}$

متناقصة $\{1, 1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

$a_n > a_{n+1}$

متناقصة تماماً $\{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

* تعريف المتتالية الثابتة: هي المتتالية التي حدودها كلها متماثلة ونضعها ثابت مثل $f(n) = 3$

$\{a_n\}_{n\geq 1}$

متزايدة تماماً $a_n - a_{n+1} < 0$

متناقصة تماماً $a_n - a_{n+1} > 0$

ثابتة $a_n - a_{n+1} = 0$

أو لو حسبناها عن طريق النسبة التالي $\frac{a_n}{a_{n+1}}$

التابع الذي خطه البياني التابع المستمر أما التابع غير مستمر يكون بنقاط التابع الذي يشمله

يكون قابل للاشتقاق إذا أمكننا رسم ميل مرسوم لمرة واحدة فقط)

عند تلك النقطة

قابل للاشتقاق في جميع نقاطه

قابل للاشتقاق جميع مماساته هي

في كل نقاطه إلا مستقيمات منطبقة على المستقيم

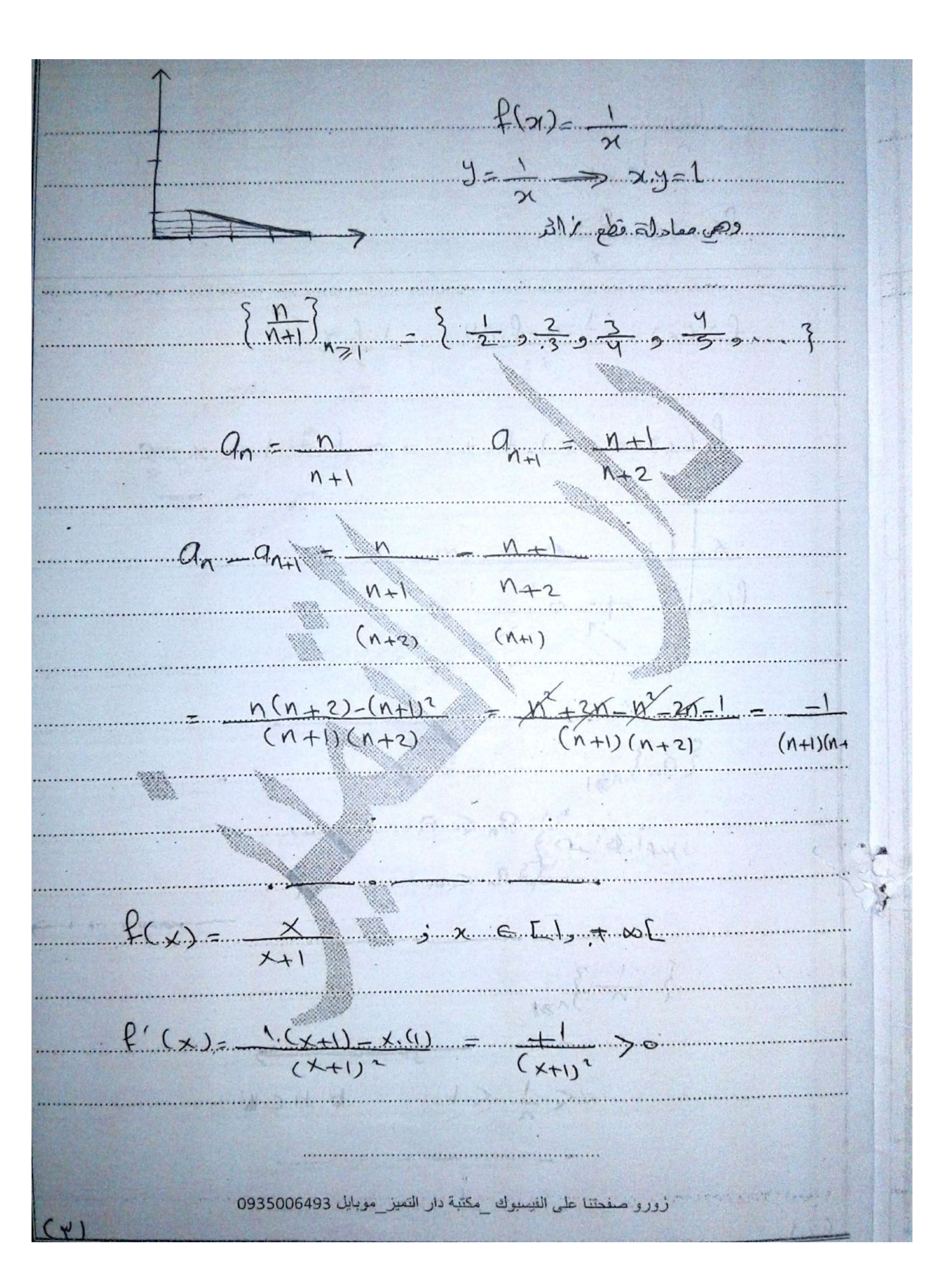
نقطة تلاقي المستقيمين $y = mx + h$

(ذلك في جميع نقاط الضلع $y' = m$

الأول والثاني عدا الرأس)

لأن هنالك عدد لا نهائي من

المماسات ويكون النهاية عند جانبيه



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x} \Longrightarrow x.y = 1$$

وهي معادلة قطع زائد

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n\geq 1} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$$

$$a_n = \frac{n}{n+1} \qquad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

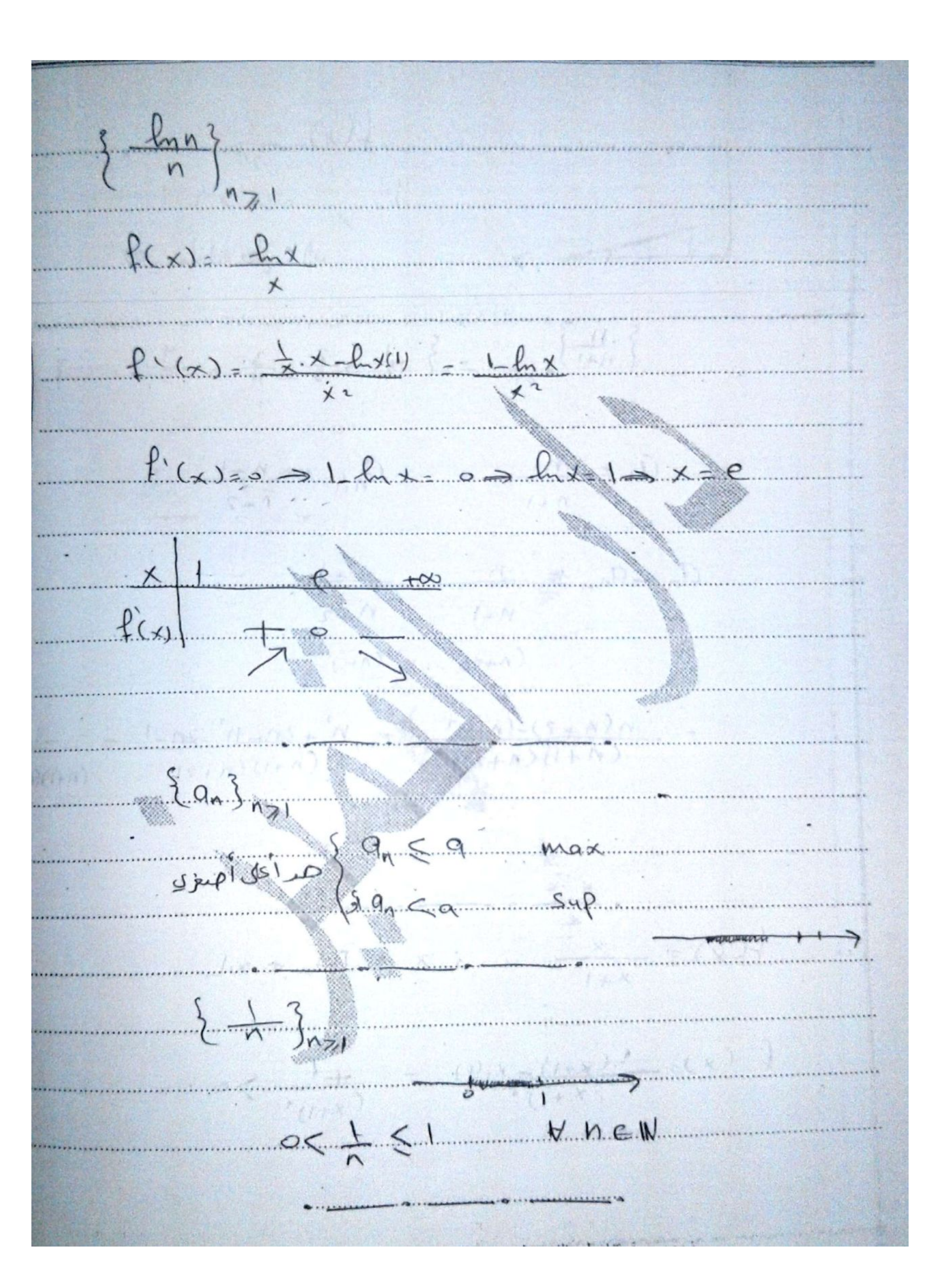
$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}$$

$$(n+2) \qquad (n+1)$$

$$= \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+}$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad ; \quad x \in [1, +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{1.(x+1) - x.(1)}{(x+1)^2} = \frac{+1}{(x+1)^2} > 0$$



$\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}_{n \geq 1}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x (1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

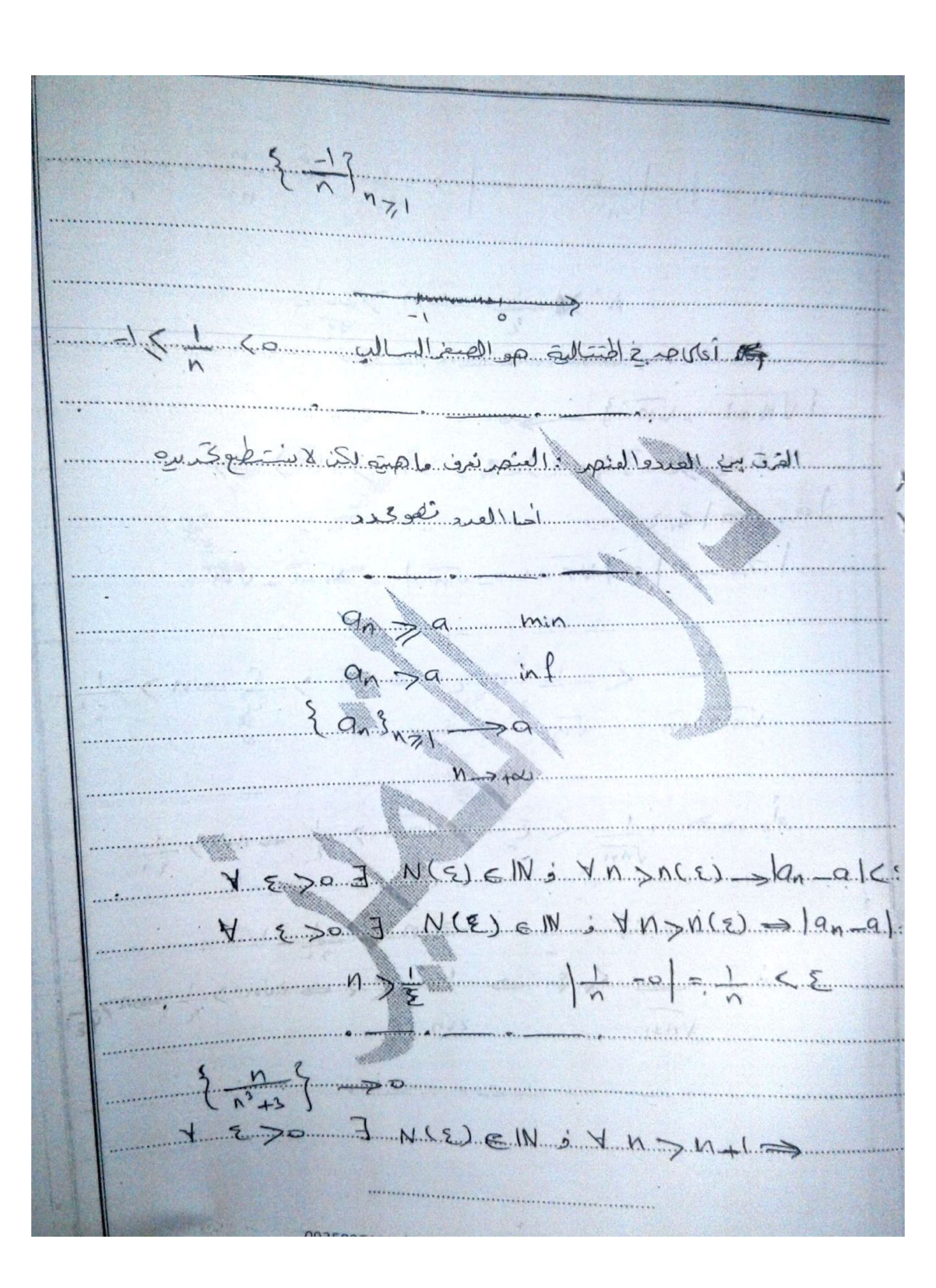
x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
		$\nearrow$		$\searrow$	

$\{a_n\}_{n \geq 1}$

حد أعلى أصغري $\begin{cases} a_n \leq a & \max \\ \text{أو } a_n < a & \sup \end{cases}$

$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 1}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$



$$\left\{\frac{-1}{n}\right\}_{n\geq 1}$$

-1   0

أعلى حد في المتتالية هو الصفر السالب $\quad -1 \leq -\frac{1}{n} < 0$

الفرق بين العدد والعنصر : العنصر نعرف ماهيته لكن لا نستطيع تحديده

أما العدد فهو محدد

$a_n \geq a$ min

$a_n > a$ inf

$$\{a_n\}_{n\geq 1} \longrightarrow a, \quad n \to +\infty$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n > N(\varepsilon) \to |a_n - a| < \varepsilon$$

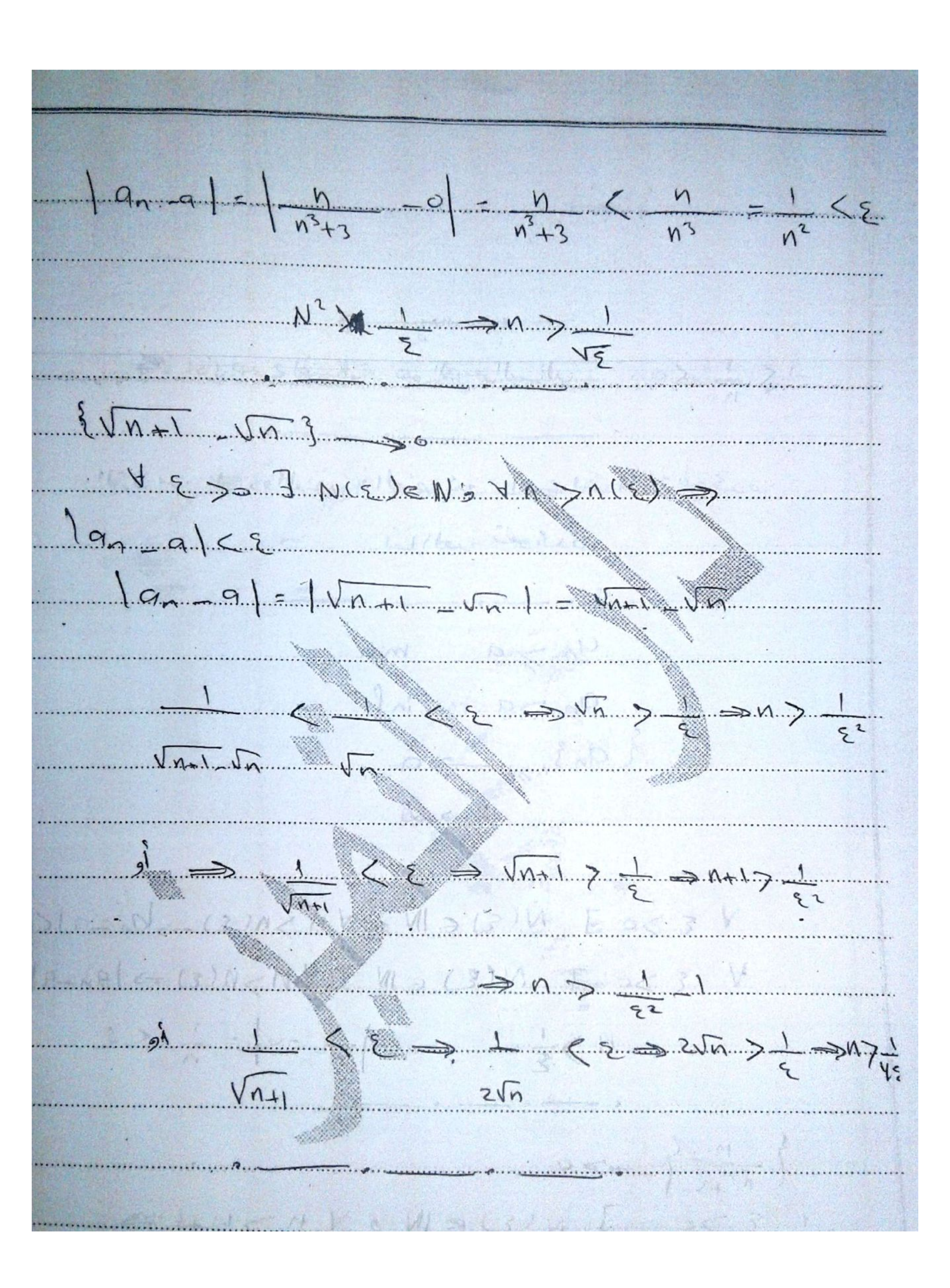
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| <$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\left\{\frac{n}{n^3+3}\right\} \longrightarrow 0$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ ;\ \forall n > N+1 \Rightarrow$$

Scanned by CamScanner



$$|a_n - a| = \left|\frac{n}{n^3+3} - 0\right| = \frac{n}{n^3+3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

$$N^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\} \longrightarrow 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$|a_n - a| < \varepsilon$

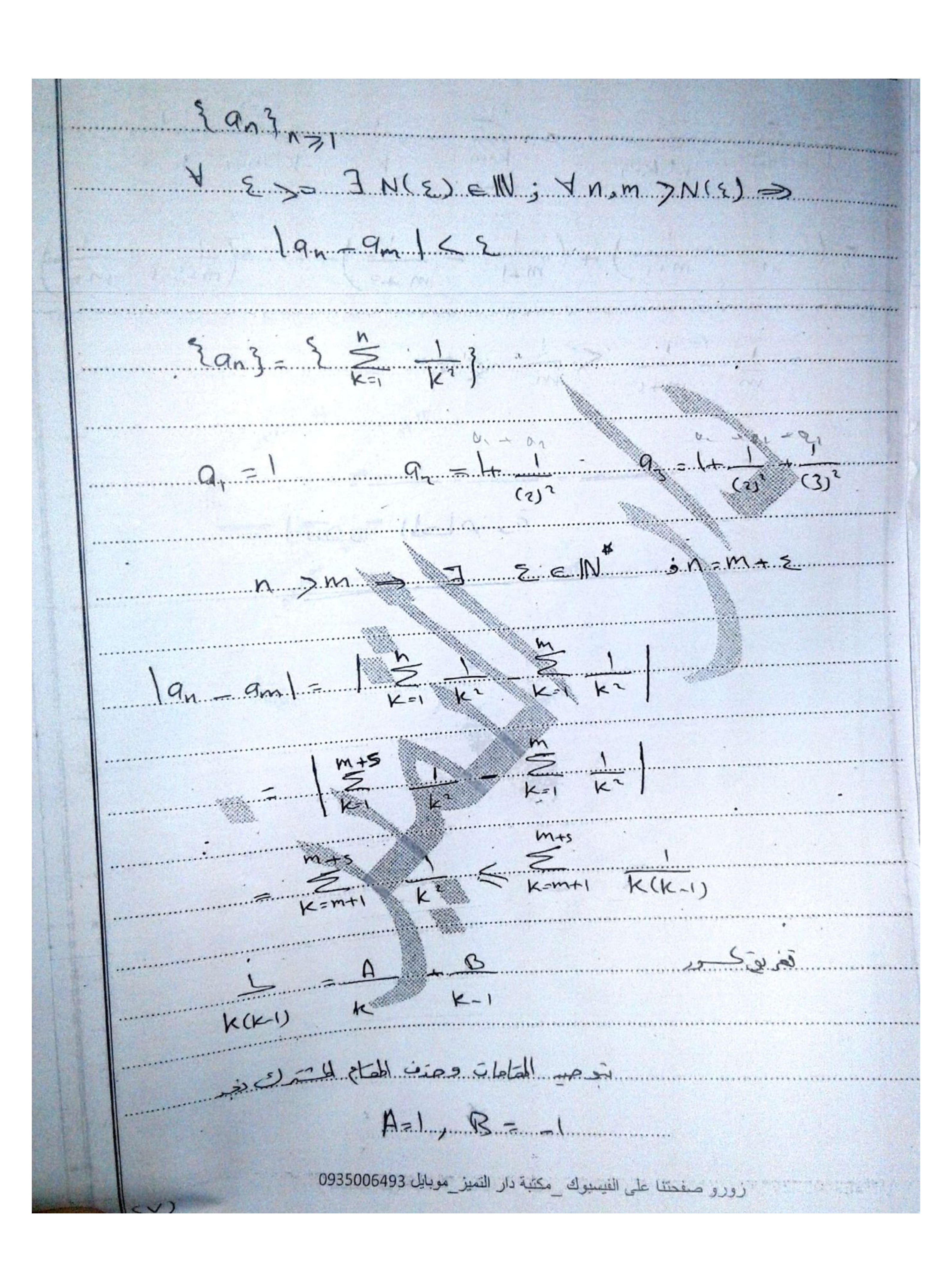
$$|a_n - a| = |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

أو $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{n+1} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon^2}$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$$

أو $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow 2\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$



$\{a_n\}_{n \geq 1}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \forall n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$|a_n - a_m| < \varepsilon$

$\{a_n\} = \{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \}$

$a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{(2)^2}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{(2)^2} + \frac{1}{(3)^2}$

$n > m \Rightarrow \exists \ \varepsilon \in \mathbb{N}^* ; n = m + \varepsilon$

$|a_n - a_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \right|$

$= \left| \sum_{k=1}^{m+s} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \right|$

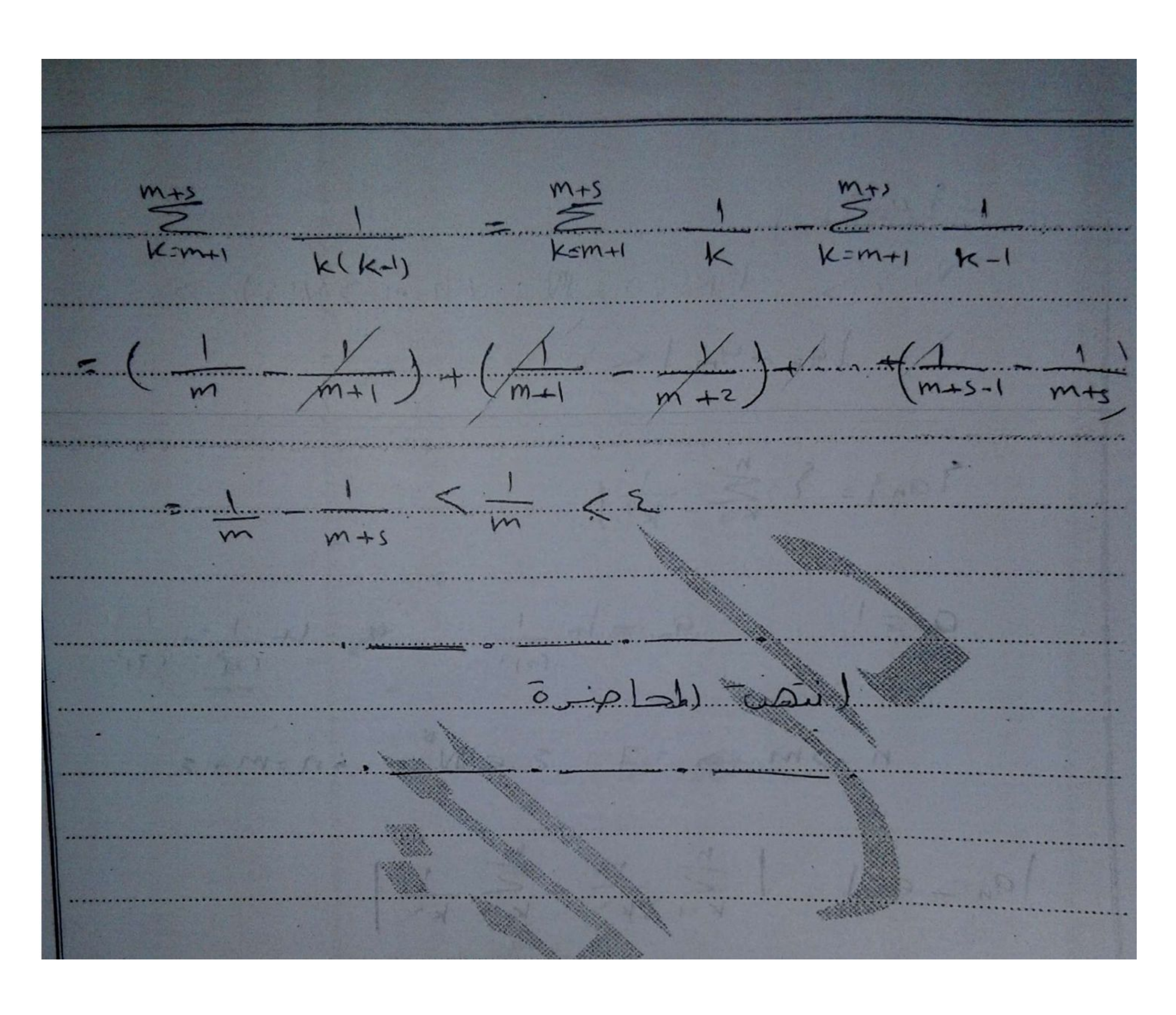
$= \sum_{k=m+1}^{m+s} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=m+1}^{m+s} \frac{1}{k(k-1)}$

تفريق كسور

$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1}$

بتوحيد المقامات وحذف المقام المشترك نجد

$A = 1 , B = -1$

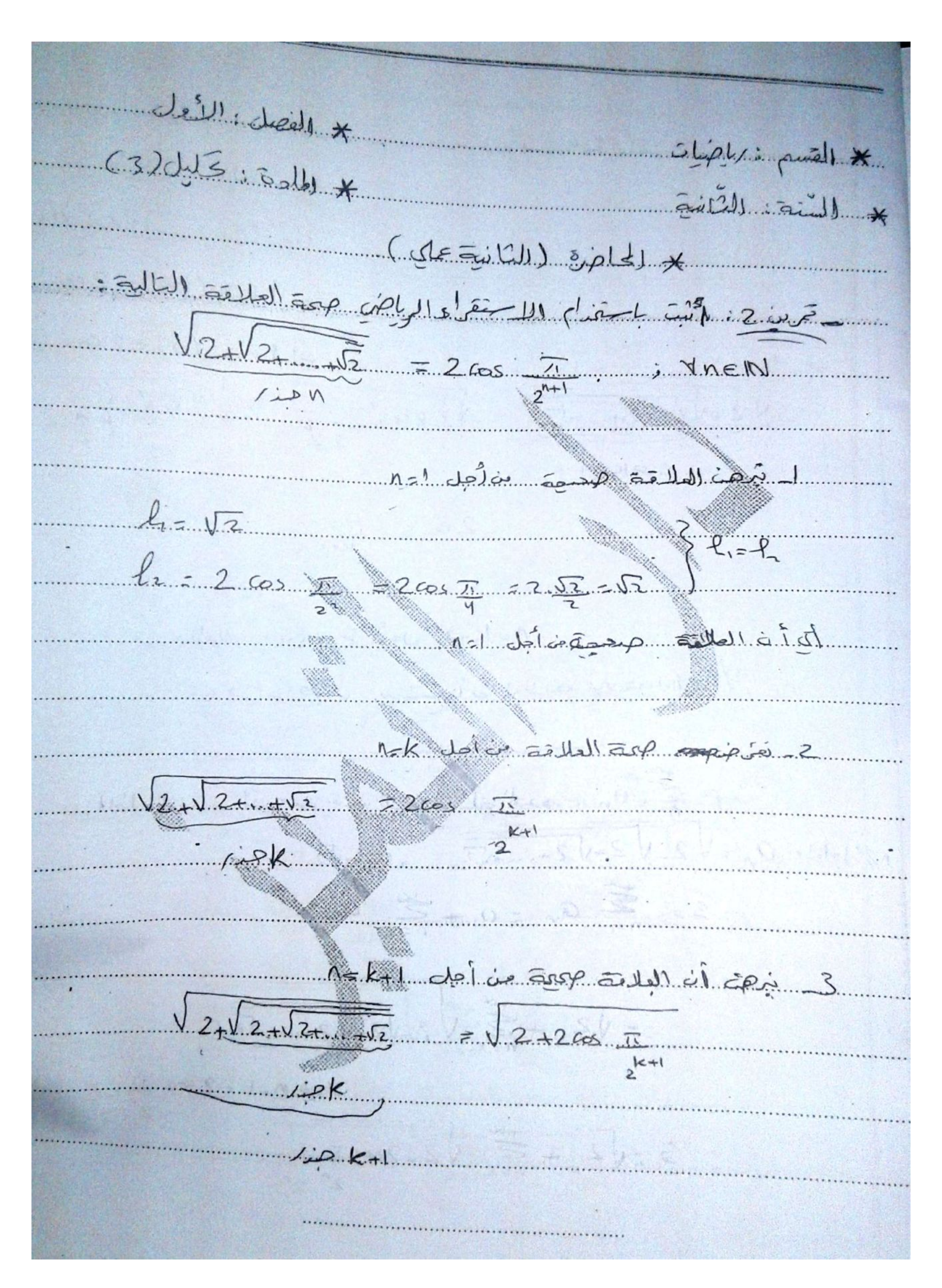


$$\sum_{k=m+1}^{m+s} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=m+1}^{m+s} \frac{1}{k} - \sum_{k=m+1}^{m+s} \frac{1}{k-1}$$

$$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m+s-1} - \frac{1}{m+s}\right)$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+s} < \frac{1}{m} < \varepsilon$$

انتهت المحاضرة



* الفصل : الأول
* القسم : رياضيات
* المادة : تحليل (3)
* السنة : الثانية

* المحاضرة (الثانية عملي)

تمرين 2 : أثبت باستخدام الاستقراء الرياضي صحة العلاقة التالية :

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ جذر}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 - نبرهن العلاقة صحيحة من أجل n=1

$l_1 = \sqrt{2}$

$l_2 = 2\cos\frac{\pi}{2^2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ $\Bigg\}\ l_1 = l_2$

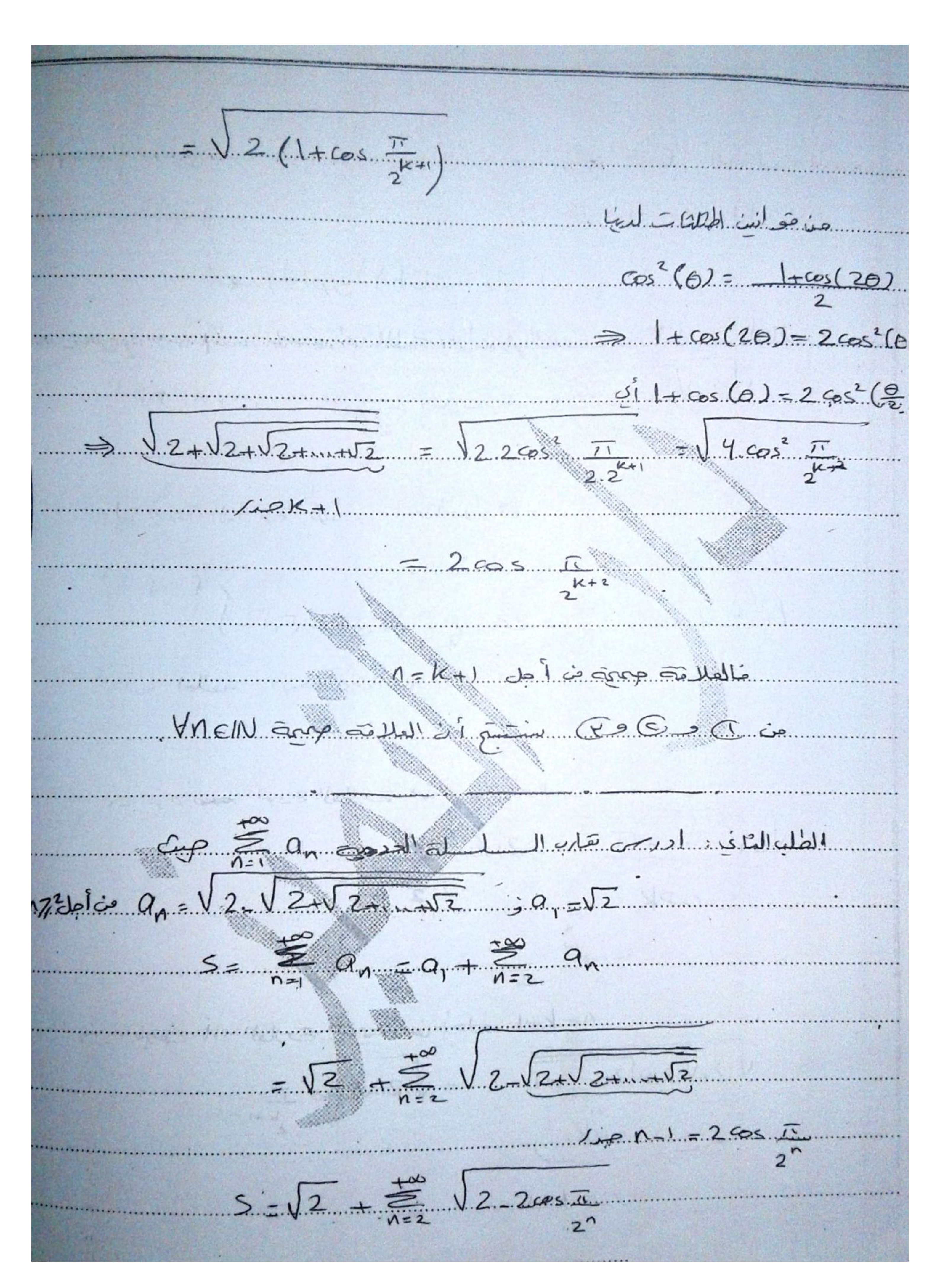
أي أن العلاقة صحيحة من أجل n=1

2 - نفرض صحة العلاقة من أجل n=k

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{k \text{ جذر}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$$

3 - نبرهن أن العلاقة صحيحة من أجل n=k+1

$$\underbrace{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}_{k \text{ جذر}}}}_{k+1 \text{ جذر}} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$



$$= \sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}$$

من قوانين المثلثات لدينا

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$\Rightarrow 1+\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$$

أي $1+\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}_{\text{جذر } k+1} = \sqrt{2 \cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2 \cdot 2^{k+1}}} = \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$$

فالعلاقة صحيحة من أجل $n = k+1$

من ① و ② و ③ نستنتج أن العلاقة صحيحة $\forall n \in \mathbb{N}$

الطلب الثاني: ادرس تقارب السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ حيث

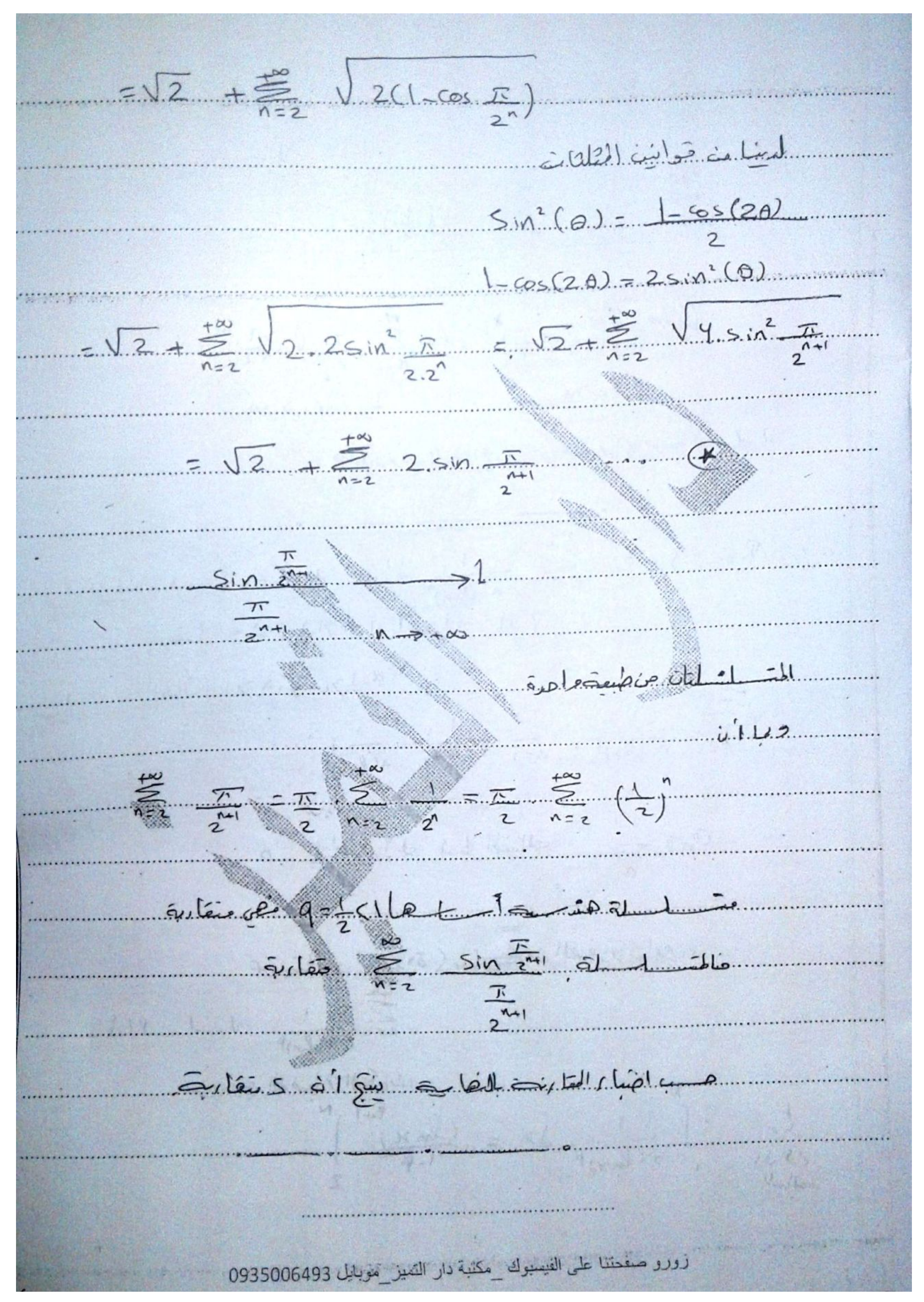
$a_1 = \sqrt{2}$; $a_n = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}$ من أجل $n \geq 2$

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n$$

$$= \sqrt{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}$$

$$n-1 \text{ جذر} = 2\cos\frac{\pi}{2^n}$$

$$S = \sqrt{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}}$$



$$= \sqrt{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

لدينا من قوانين المثلثات

$$\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$1-\cos(2\theta) = 2\sin^2(\theta)$$

$$= \sqrt{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{2 \cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2\cdot 2^n}} = \sqrt{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= \sqrt{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \quad \ldots (*)$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

المتسلسلتان من طبيعة واحدة

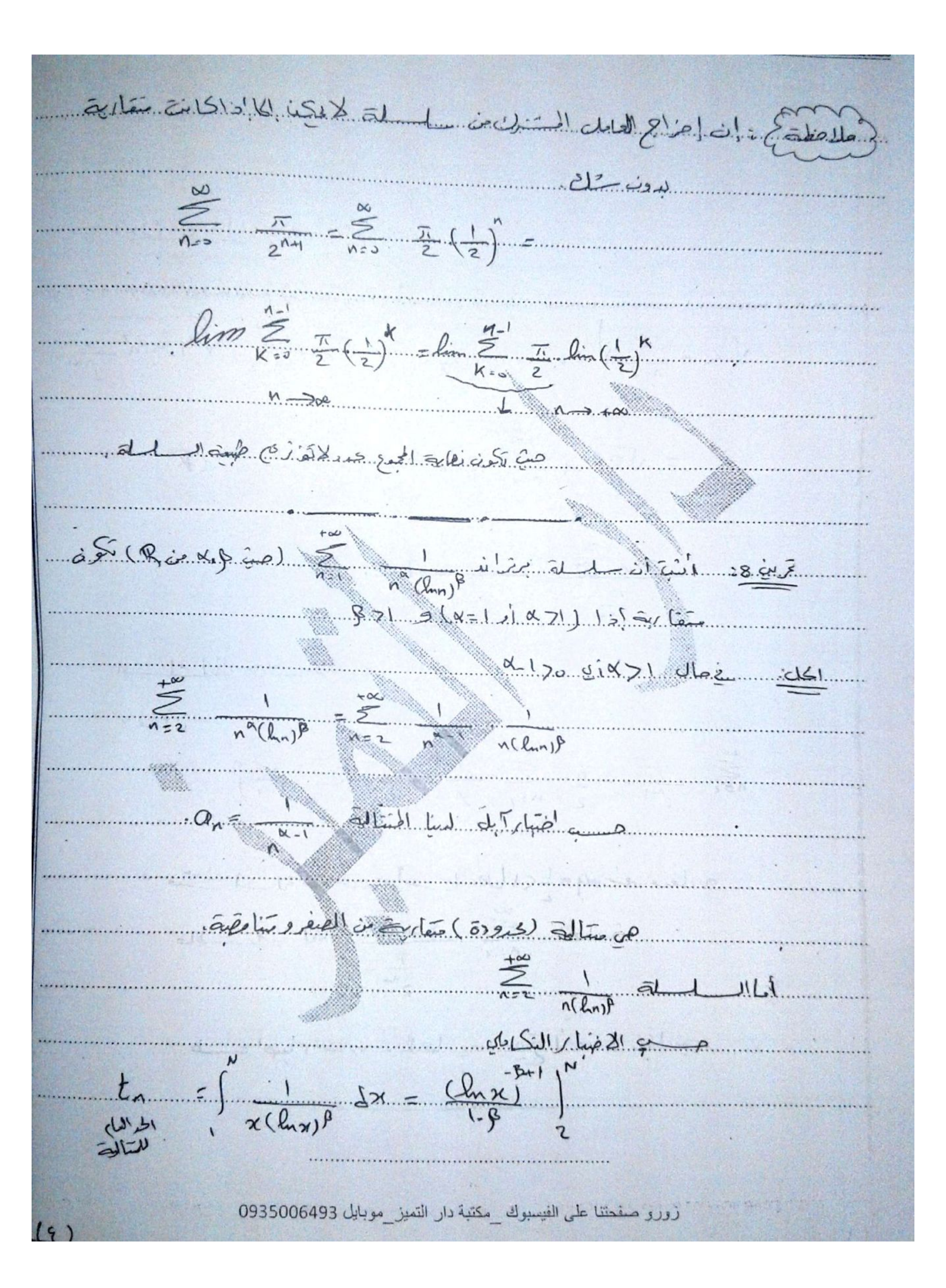
وبما أن

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

متسلسلة هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}<1$ فهي متقاربة

فالمتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$ متقاربة

حسب اختبار المقارنة بالنهاية ينتج أن د متقاربة



ملاحظة : إن إخراج العامل المشترك من سلسلة لا يمكن إلا إذا كانت متقاربة بدون شك

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \underbrace{\lim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{2}}_{\downarrow\ n\to+\infty} \lim\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

حيث تكون نهاية المجموع حد لا تغيّر طبيعة السلسلة

تمرين 8: أثبت أن سلسلة برتراند $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ (حيث α,β من $\mathbb{R}$) تكون متقاربة إذا ($\alpha>1$ أو $\alpha=1$) و $\beta>1$

الحل: في حال $\alpha>1$ أي $\alpha-1>0$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$$

حسب اختبار آبل لدينا المتتالية $a_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

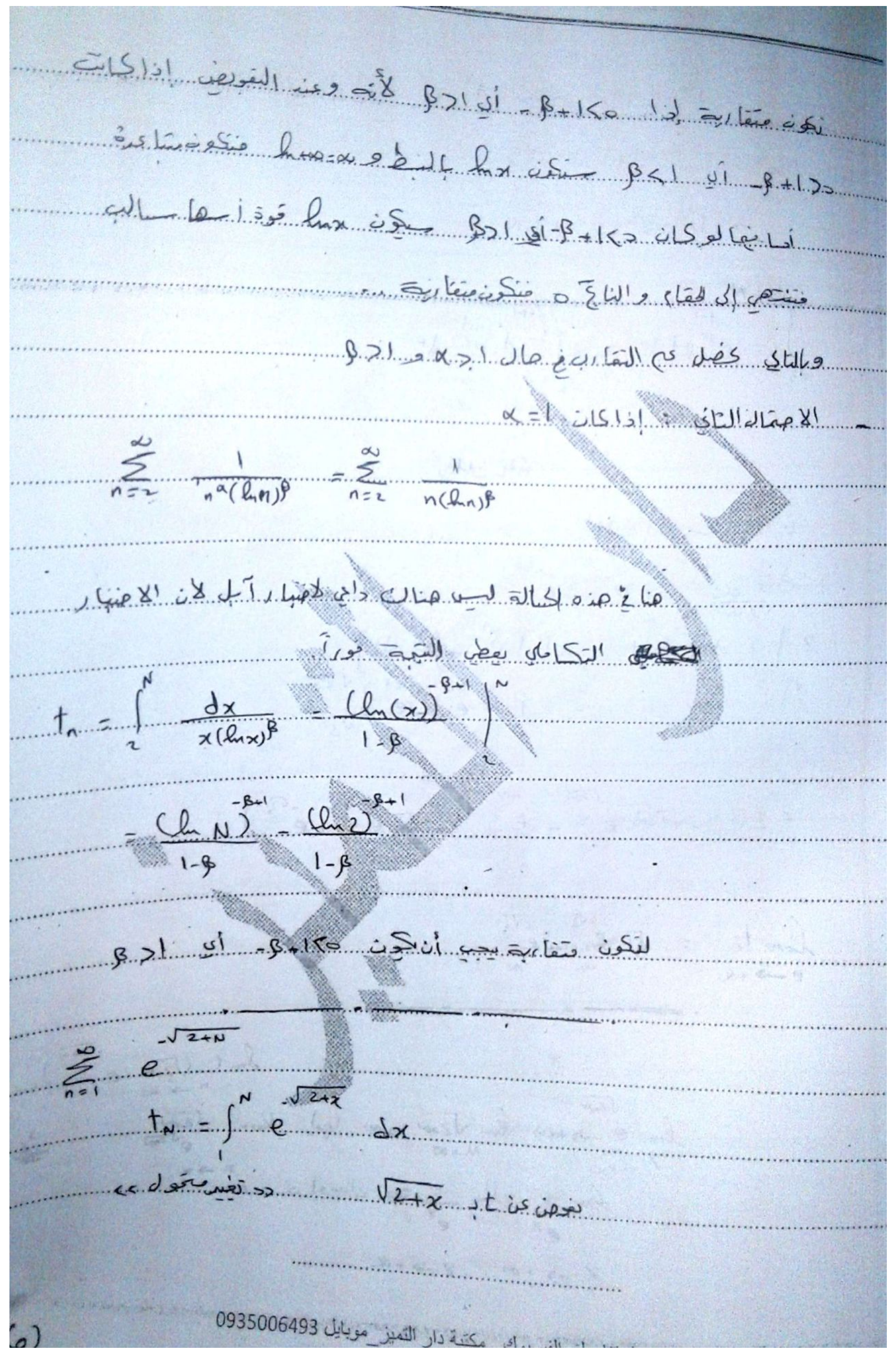
هي متتالية (محدودة) متقاربة من الصفر و متناقصة.

أما السلسلة $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$

حسب الاختبار التكاملي

$$t_n = \int_1^N \frac{1}{x(\ln x)^{\beta}}\,dx = \left.\frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{1-\beta}\right|_2^N$$

الحد العام للمتتالية



إذا كانت ... وعند التعويض لأنه

تكون متقاربة إذا $-\beta+1<0$ أي $\beta>1$

$-\beta+1>0$ أي $\beta<1$ ستكون $\ln x$ بالبسط و $\infty=\infty$ فتكون متباعدة

أما فيما لو كان $-\beta+1<0$ أي $\beta>1$ ستكون $\ln x$ قوة أسها سالب

فتنتهي إلى المقام والناتج 0 فتكون متقاربة ...

وبالتالي نحصل على التقارب في حال $\alpha>1$ و $\beta>1$

- الاحتمال الثاني: إذا كانت $\alpha=1$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$$

هنا في هذه الحالة ليس هناك داعي لاختبار آبل لأن الاختبار

التكاملي يعطي النتيجة فوراً

$$t_n=\int_{2}^{N}\frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}}=\left.\frac{(\ln(x))^{-\beta+1}}{1-\beta}\right|_{2}^{N}$$

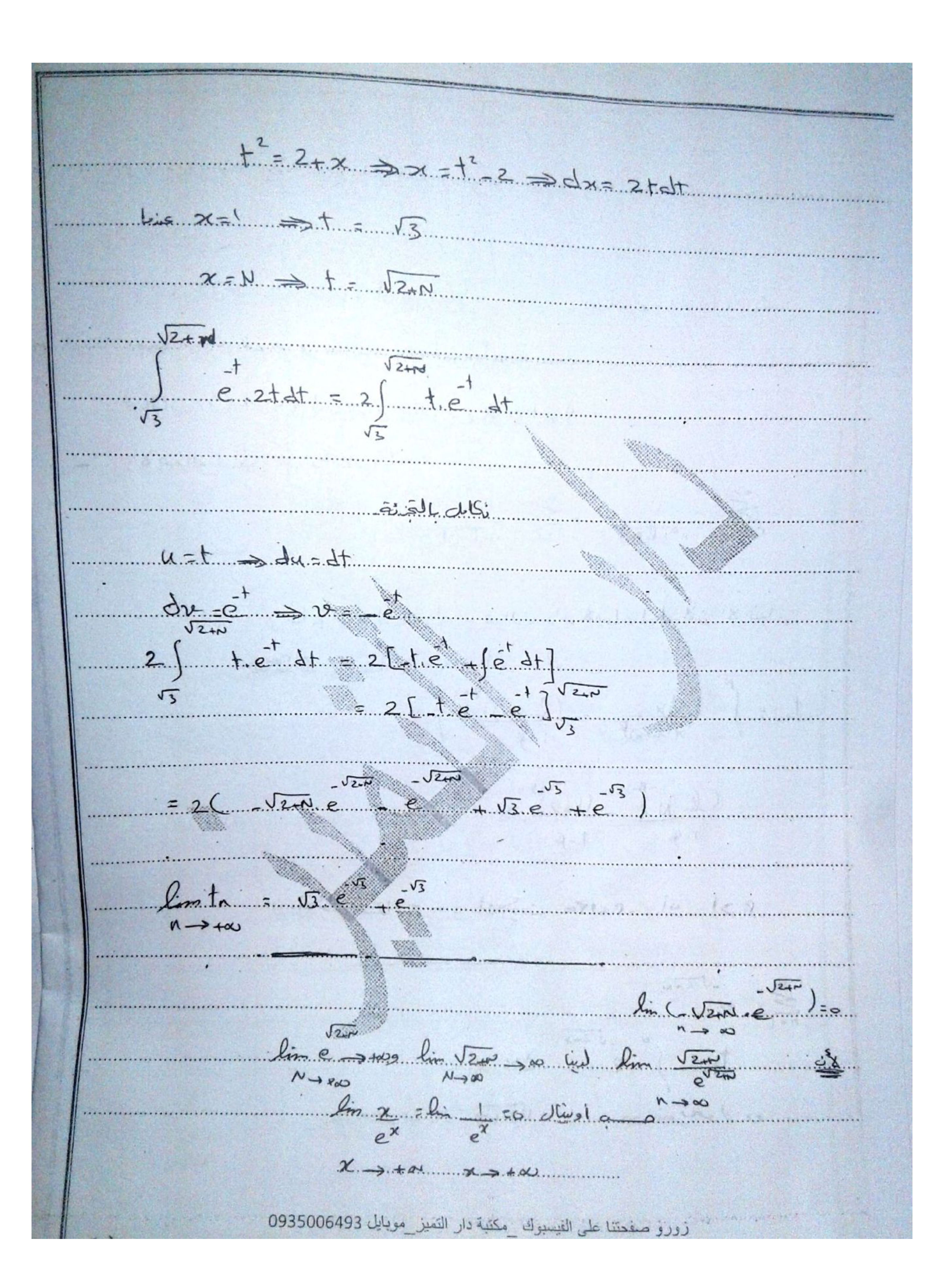
$$=\frac{(\ln N)^{-\beta+1}}{1-\beta}-\frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{1-\beta}$$

لتكون متقاربة يجب أن تكون $-\beta+1<0$ أي $\beta>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{2+n}}$$

$$t_N=\int_{1}^{N}e^{-\sqrt{2+x}}\,dx$$

نعوض عن t بـ $\sqrt{2+x}$ «تغيير متحول»



$t^2 = 2+x \Rightarrow x = t^2 - 2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

عندما $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3}$

$x = n \Rightarrow t = \sqrt{2+n}$

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2+n}} e^{-t} \cdot 2t\,dt = 2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2+n}} t \cdot e^{-t}\,dt$$

تكامل بالتجزئة

$u = t \Rightarrow du = dt$

$dv = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t}$

$$2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2+n}} t \cdot e^{-t}\,dt = 2\left[-t \cdot e^{-t} + \int e^{-t}\,dt\right]$$

$$= 2\left[-t\,e^{-t} - e^{-t}\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2+n}}$$

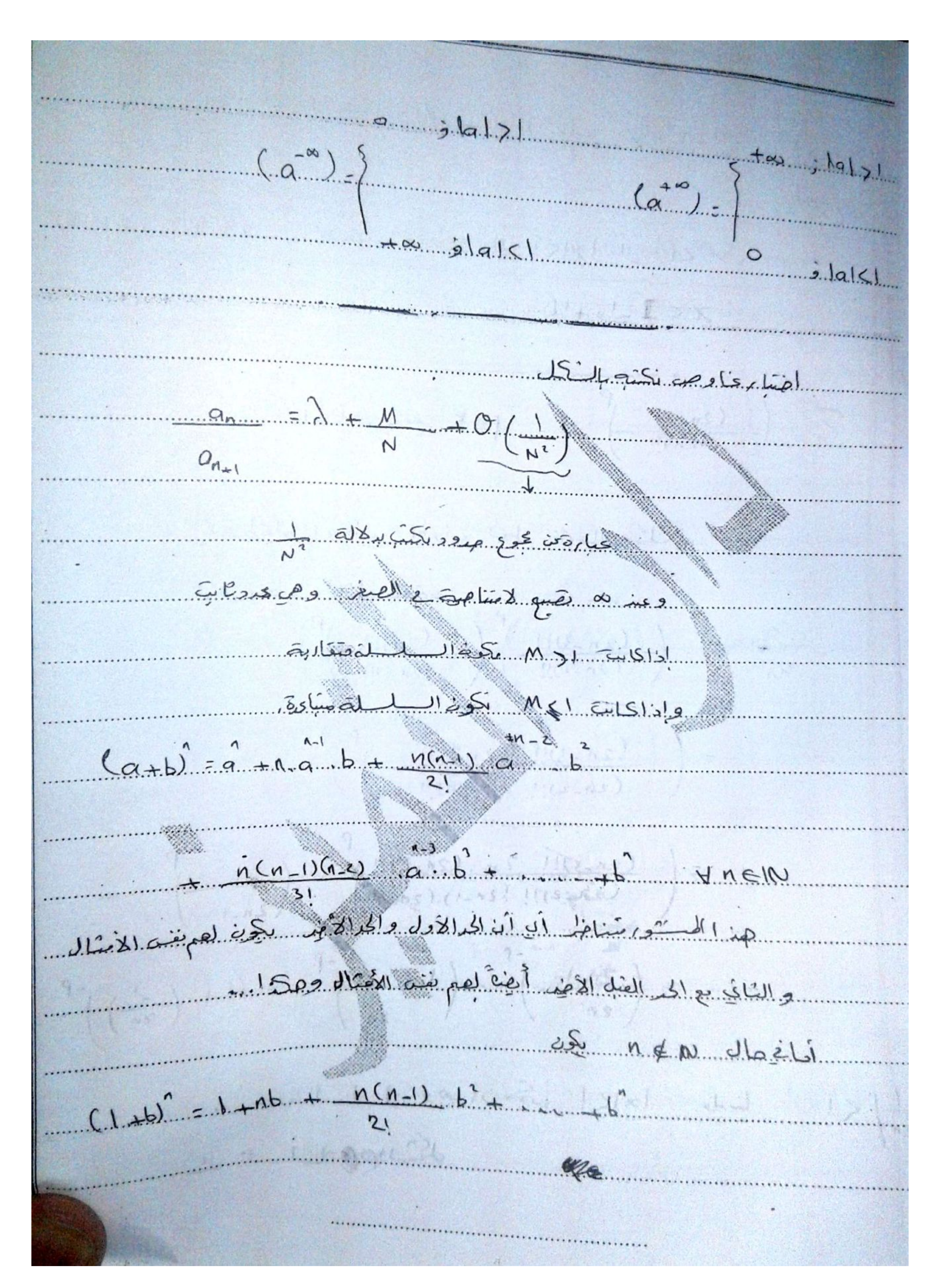
$$= 2\left(-\sqrt{2+n}\cdot e^{-\sqrt{2+n}} - e^{-\sqrt{2+n}} + \sqrt{3}\cdot e^{-\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \sqrt{3}\cdot e^{-\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\sqrt{2+n}\cdot e^{-\sqrt{2+n}}\right) = 0$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{2+n}} \to +\infty$ و $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2+n} \to +\infty$ لدينا $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2+n}}{e^{\sqrt{2+n}}}$

حسب أوبيتال $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$



$$(a^{+\infty}) = \begin{cases} +\infty & \text{إذا } |a|>1 \\ 0 & \text{إذا } |a|<1 \end{cases}$$

$$(a^{-\infty}) = \begin{cases} 0 & \text{إذا } |a|>1 \\ +\infty & \text{إذا } |a|<1 \end{cases}$$

اختبار غاوص نكتبه بالشكل

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{M}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

عبارة عن مجموع حدود نكتب بدلالة $\frac{1}{N^2}$

وعند ∞ تصبح لامتناهية في الصغر وهي محدودة ثابت

إذا كانت $M > 1$ تكون السلسلة متقاربة

وإذا كانت $M \leq 1$ تكون السلسلة متباعدة.

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,b + \frac{n(n-1)}{2!}\,a^{n-2}\,b^2$$

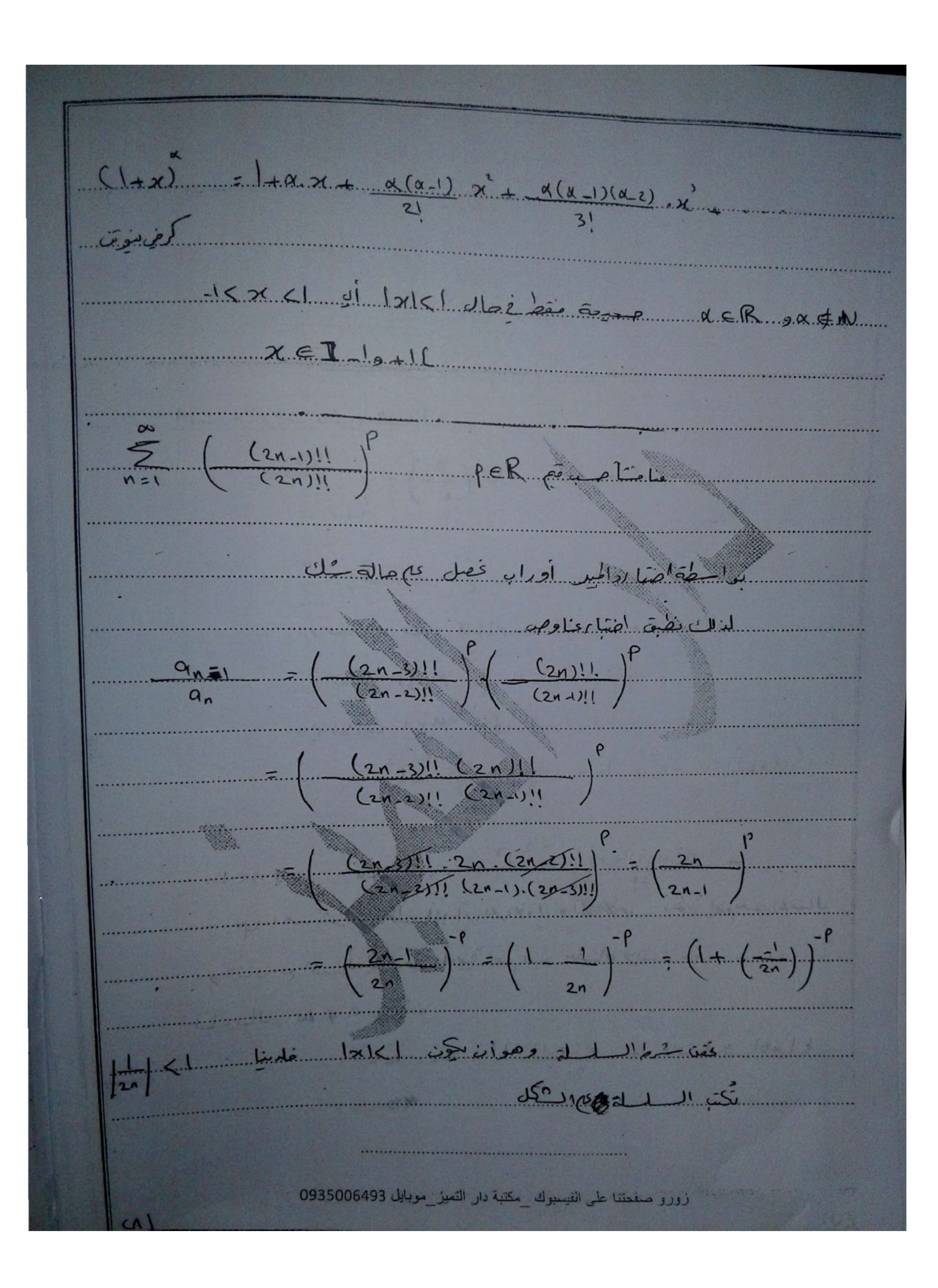
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,a^{n-3}\,b^3 + \dots + b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

هذا المستوى متناظر أي أن الحد الأول والحد الأخير يكون لهم نفس الأمثال

والثاني مع الحد قبل الأخير أيضاً لهم نفس الأمثال وهكذا...

أما في حال $n \notin \mathbb{N}$ يكون

$$(1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2!}\,b^2 + \dots + b^n$$



$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha . x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}.x^3 + \dots$$

كرضي بيوتن

صحيحة فقط في حال $|x|<1$ أي $-1<x<1$ $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\alpha\notin\mathbb{N}$

$x\in]-1,+1[$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{p}$$

ناقش تقارب حسب قيم $p\in\mathbb{R}$

بواسطة اختبار دالمبير أو راب نحصل على حالة شك

لذلك نطبق اختبار رعاوب

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \left(\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\right)^{p}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^{p}$$

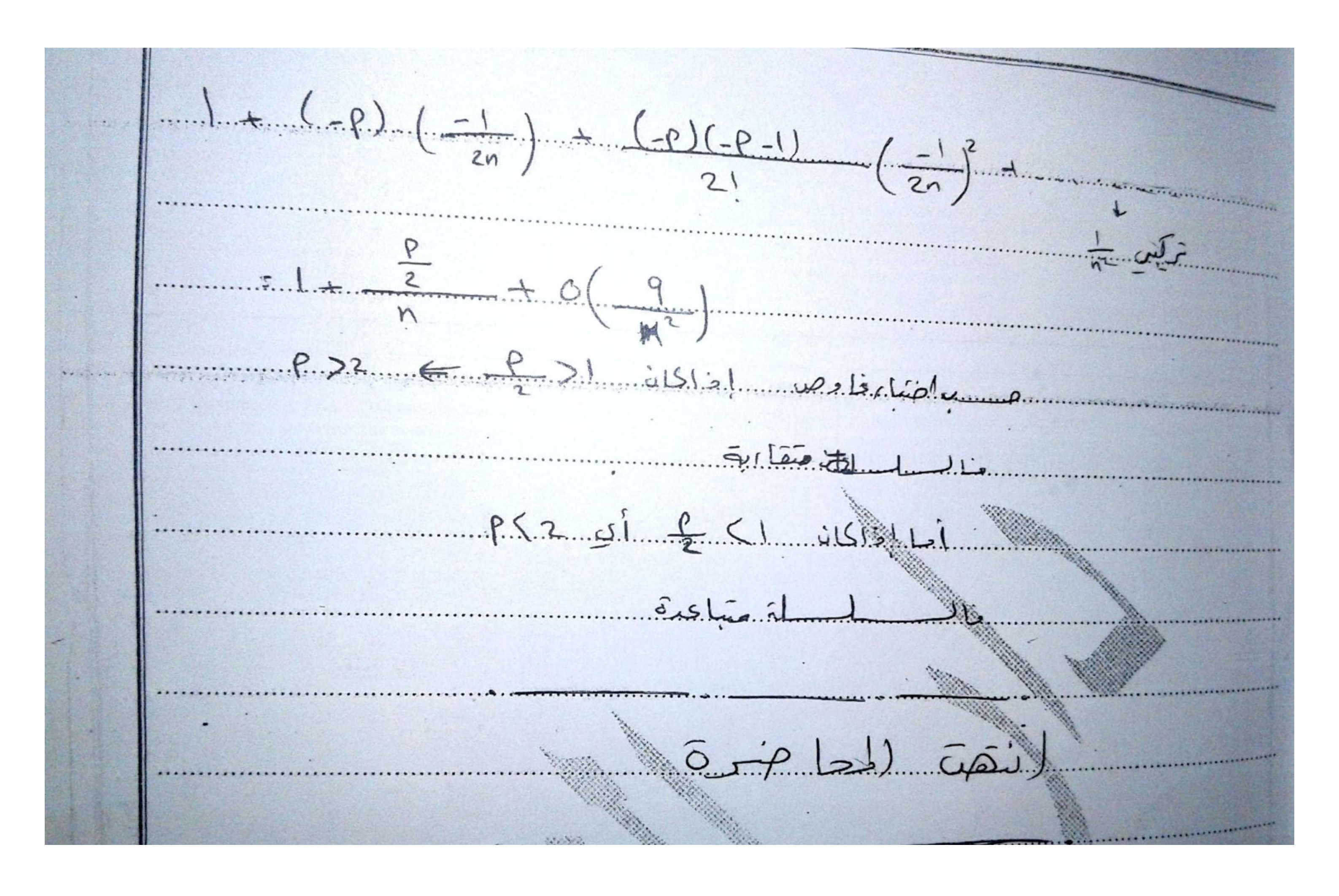
$$= \left(\frac{(2n-3)!!\ (2n)!!}{(2n-2)!!\ (2n-1)!!}\right)^{p}$$

$$= \left(\frac{(2n-3)!!\ .2n.\ (2n-2)!!}{(2n-2)!!\ (2n-1).(2n-3)!!}\right)^{p} = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{p}$$

$$= \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{-p} = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-p} = \left(1+\left(\frac{-1}{2n}\right)\right)^{-p}$$

تحقق شرط السلسلة وهو أن يكون $|x|<1$ فلدينا $\left|\frac{1}{2n}\right|<1$

نكتب السلسلة بالشكل



$$1 + (-p)\left(\frac{-1}{2n}\right) + \frac{(-p)(-p-1)}{2!}\left(\frac{-1}{2n}\right)^2 + \dots$$

↓ تركيب $\frac{1}{n^2}$

$$= 1 + \frac{\frac{p}{2}}{n} + O\left(\frac{9}{n^2}\right)$$

حسب اختبار غاوص إذا كان $1 < \frac{p}{2} \Leftarrow p > 2$

فالسلسلة متقاربة

أما إذا كان $\frac{p}{2} < 1$ أي $p < 2$

فالسلسلة متباعدة

انتهت المحاضرة

* القسم: رياضيات * الفصل: الأول

* السنة: الثانية * المادة: تحليل (3)

* المحاضرة: الثالثة (عملي)

الجداءات اللانهائية: $\prod_{n=1}^{\infty} P_n = P_1 . P_2 \ldots P_n \ldots$

(F_n) هي متتالية الجداءات الجزئية:

$F_1 = P_1$

$F_2 = P_1 . P_2$

$F_n = P_1 . P_2 \ldots P_n = \prod_{k=1}^{n} P_k$

1- $\{F_n\}$ متقاربة من عدد $F \neq 0$ ⟸ الجداء متقارب

2- $\{F_n\}$ متقاربة من (0) أو ($\pm\infty$) أو لها أكثر من نهاية ⟸ الجداء متباعد

⟸ يمكننا دراسة تقارب أو تباعد الجداءات عن طريق استخدام الدالة اللوغاريتمية:

$$\ln F_n = \ln \prod_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n} \ln P_k$$

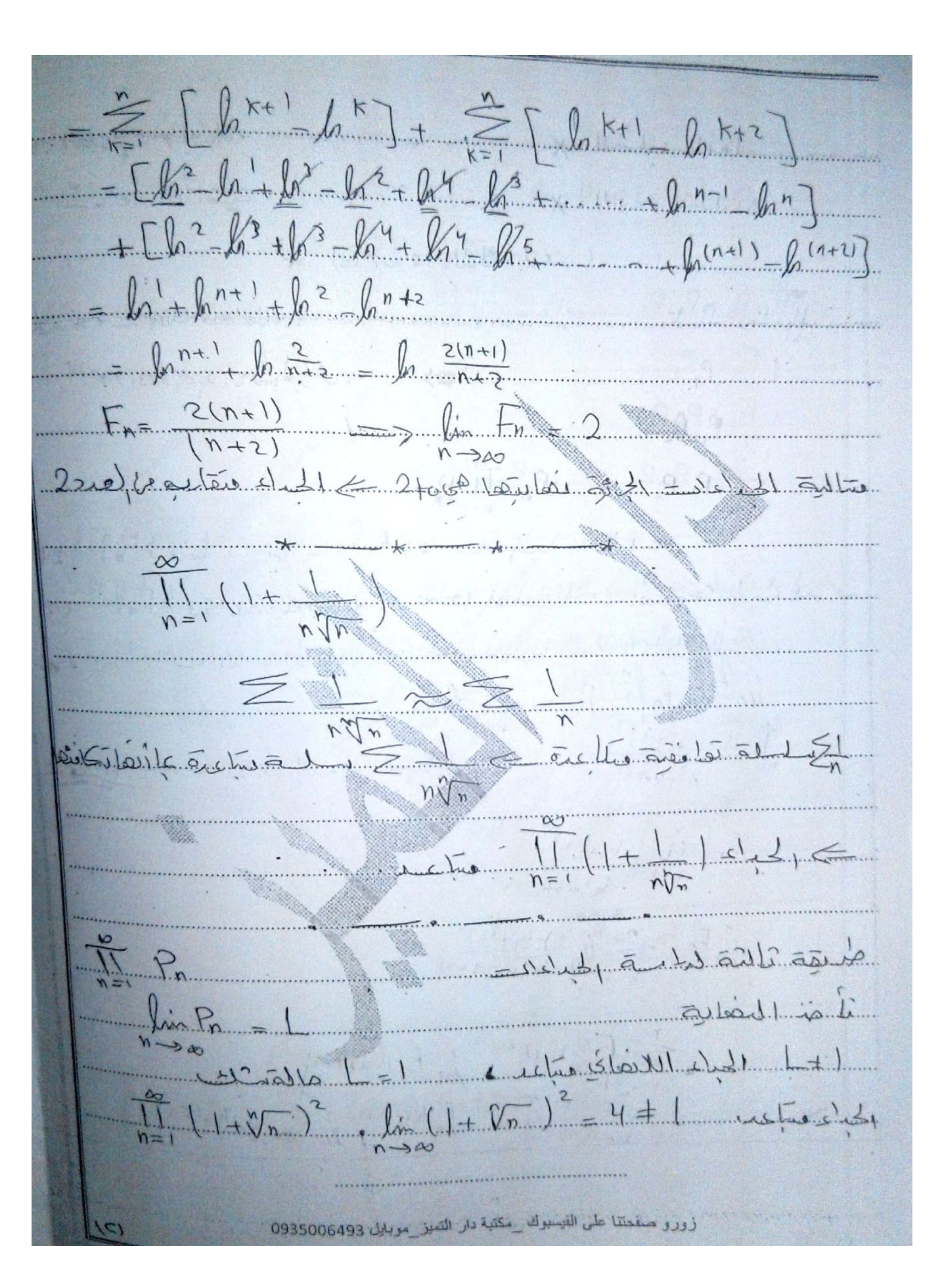
مثال: ادرس تقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$

$$F_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k^2+2k}$$

$$\ln F_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\ln (k+1)^2 - \ln k(k+2) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\ln (k+1) + \ln (k+1) - \ln k + \ln (k+2) \right]$$



$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(k+1) - \ln k\right] + \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(k+1) - \ln(k+2)\right]$$

$$= \left[\ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \dots + \ln(n-1) - \ln n\right]$$

$$+ \left[\ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 + \ln 4 - \ln 5 + \dots + \ln(n+1) - \ln(n+2)\right]$$

$$= \ln 1 + \ln(n+1) + \ln 2 - \ln(n+2)$$

$$= \ln(n+1) + \ln\frac{2}{n+2} = \ln\frac{2(n+1)}{n+2}$$

$$F_n = \frac{2(n+1)}{(n+2)} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} F_n = 2$$

متتالية الجداءات الجزئية نهايتها هي $2 \neq 0$ ⟸ الجداء متقارب من العدد 2

* ——— * ——— * ——— *

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$$

$$\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \approx \sum \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$ السلسلة توافقية متباعدة ⟸ $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ سلسلة متباعدة لأنها تكافئ

⟸ الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$ متباعد.

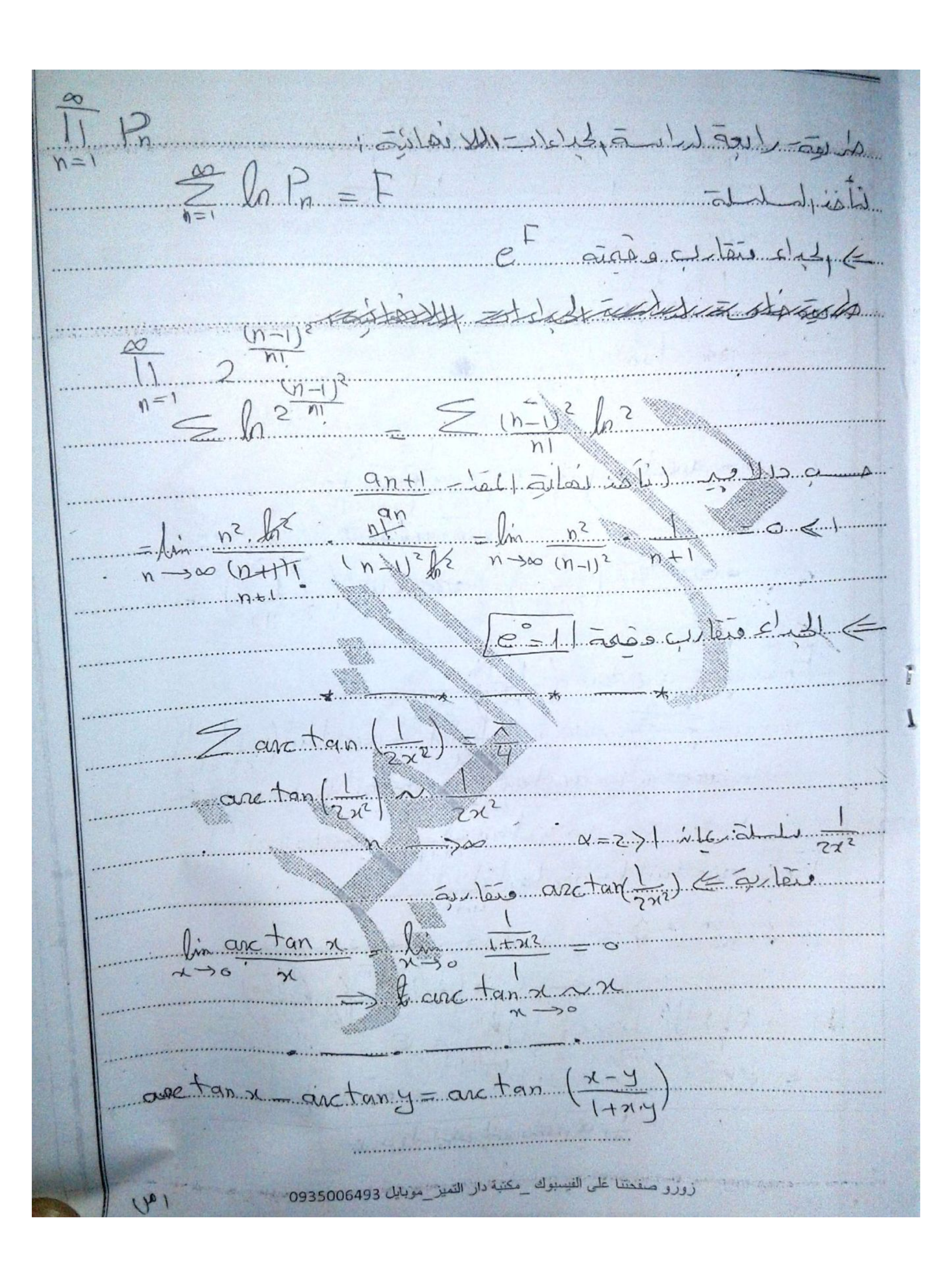
——— . ——— . ———

طريقة ثالثة لدراسة الجداءات $\prod_{n=1}^{\infty} P_n$

نأخذ النهاية $\lim_{n\to\infty} P_n = L$

$L \neq 1$ الجداء اللانهائي متباعد ، $L = 1$ ما المشكلة

الجداء متباعد $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt[n]{n}\right)^2 = 4 \neq 1$ ، $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\sqrt[n]{n}\right)^2$



طريقة رابعة لدراسة الجداءات اللانهائية: $\prod_{n=1}^{\infty} P_n$

نأخذ السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln P_n = F$

⇐ الجداء متقارب وقيمته e^F

~~طريقة خامسة لدراسة الجداءات اللانهائية~~

$$\prod_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{(n-1)^2}{n!}}$$

$$\sum \ln 2^{\frac{(n-1)^2}{n!}} = \sum \frac{(n-1)^2}{n!} \ln 2$$

حسب دالامبير (نأخذ نهاية المقدار $\frac{a_{n+1}}{a_n}$)

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 \cdot \ln 2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n-1)^2 \ln 2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n-1)^2} \cdot \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

⇐ الجداء متقارب وقيمة $\boxed{e^0 = 1}$

* ——— * ——— * ——— *

$$\sum \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) \sim \frac{1}{2x^2} \quad n \to \infty$$

$\frac{1}{2x^2}$ سلسلة ريمان $\alpha = 2 > 1$

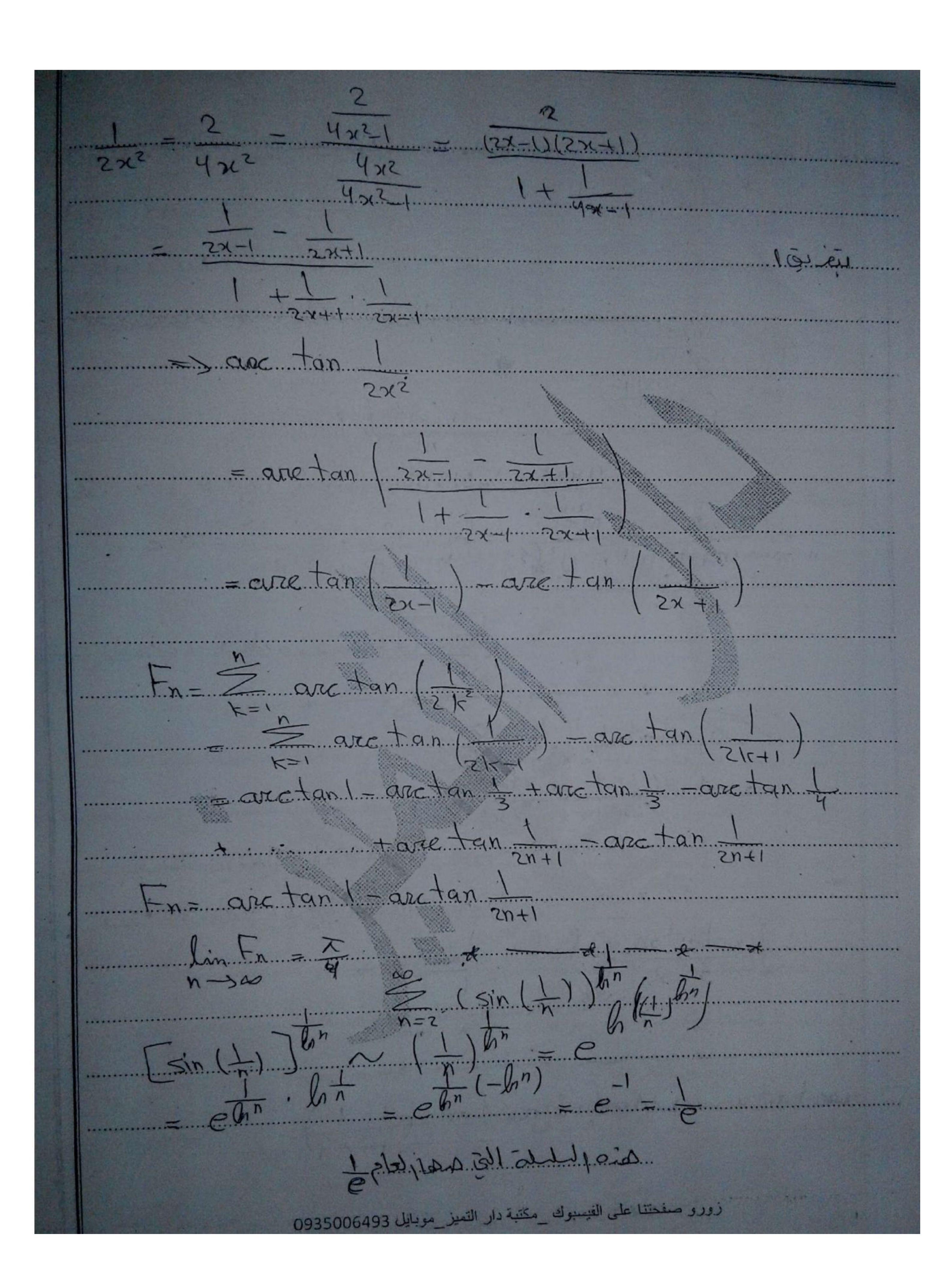
متقاربة ⇐ $\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ متقاربة

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \arctan x \sim x \quad x \to 0$$

—— . —— . ——

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$$



$$\frac{1}{2x^2} = \frac{2}{4x^2} = \frac{\frac{2}{4x^2-1}}{\frac{4x^2}{4x^2-1}} = \frac{\frac{2}{(2x-1)(2x+1)}}{1+\frac{1}{4x^2-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}}{1 + \frac{1}{2x+1} \cdot \frac{1}{2x-1}}$$ [illegible]

$$\Rightarrow \arctan \frac{1}{2x^2}$$

$$= \arctan \left(\frac{\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1}}{1 + \frac{1}{2x-1} \cdot \frac{1}{2x+1}} \right)$$

$$= \arctan\left(\frac{1}{2x-1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2x+1}\right)$$

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k-1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \arctan 1 - \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{3} - \arctan \frac{1}{4}$$

$$+ \cdots + \arctan \frac{1}{2n+1} - \arctan \frac{1}{2n+1}$$

$$F_n = \arctan 1 - \arctan \frac{1}{2n+1}$$

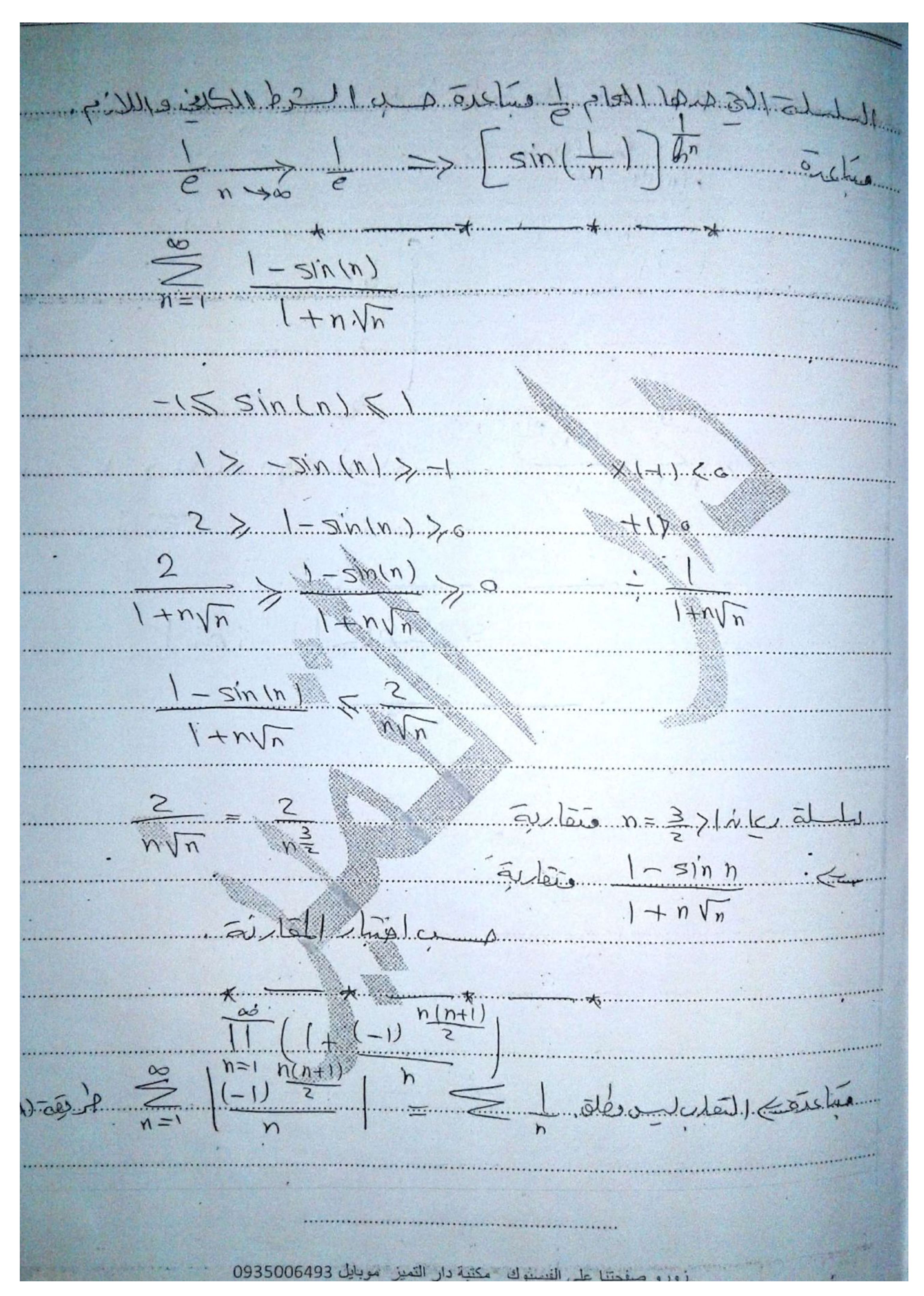
$$\lim_{n \to \infty} F_n = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\ln n}} \qquad \ln\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}}$$

$$\left[\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{\ln n}} \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}} = e$$

$$= e^{\frac{1}{\ln n} \cdot \ln \frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{\ln n}(-\ln n)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

هذه السلسلة التي حدها العام $\frac{1}{e}$



السلسلة التي حدها العام $\frac{1}{e}$ متباعدة حسب الشرط الكافي واللازم.

متباعدة $\left[\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n^n}} \Rightarrow \frac{1}{e} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}$

* —— * —— * —— *

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\sin(n)}{1+n\sqrt{n}}$$

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$1 \geq -\sin(n) \geq -1 \qquad \times(-1)$$

$$2 \geq 1-\sin(n) \geq 0 \qquad +1$$

$$\frac{2}{1+n\sqrt{n}} \geq \frac{1-\sin(n)}{1+n\sqrt{n}} \geq 0 \qquad \div \frac{1}{1+n\sqrt{n}}$$

$$\frac{1-\sin(n)}{1+n\sqrt{n}} \leq \frac{2}{n\sqrt{n}}$$

$\frac{2}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ سلسلة ريمان $n = \frac{3}{2} > 1$ متقاربة

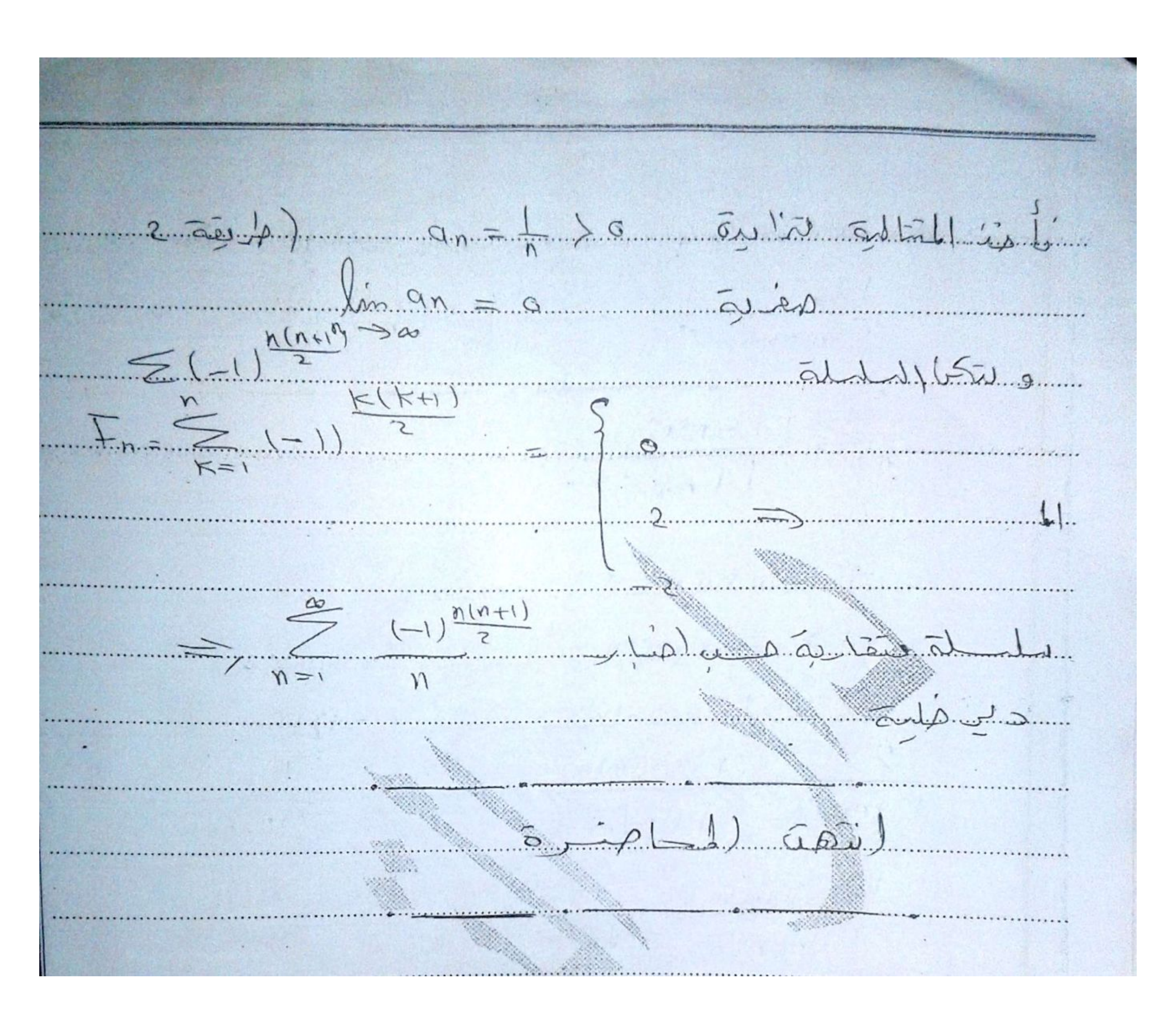
حسب: $\frac{1-\sin n}{1+n\sqrt{n}}$ متقاربة

حسب اختبار المقارنة.

* —— * —— * —— *

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ متباعدة حسب التقارب المطلق حسب طريقة (1)



لأن المتتالية تناقصية $a_n = \frac{1}{n} > 0$ (طريقة 2)

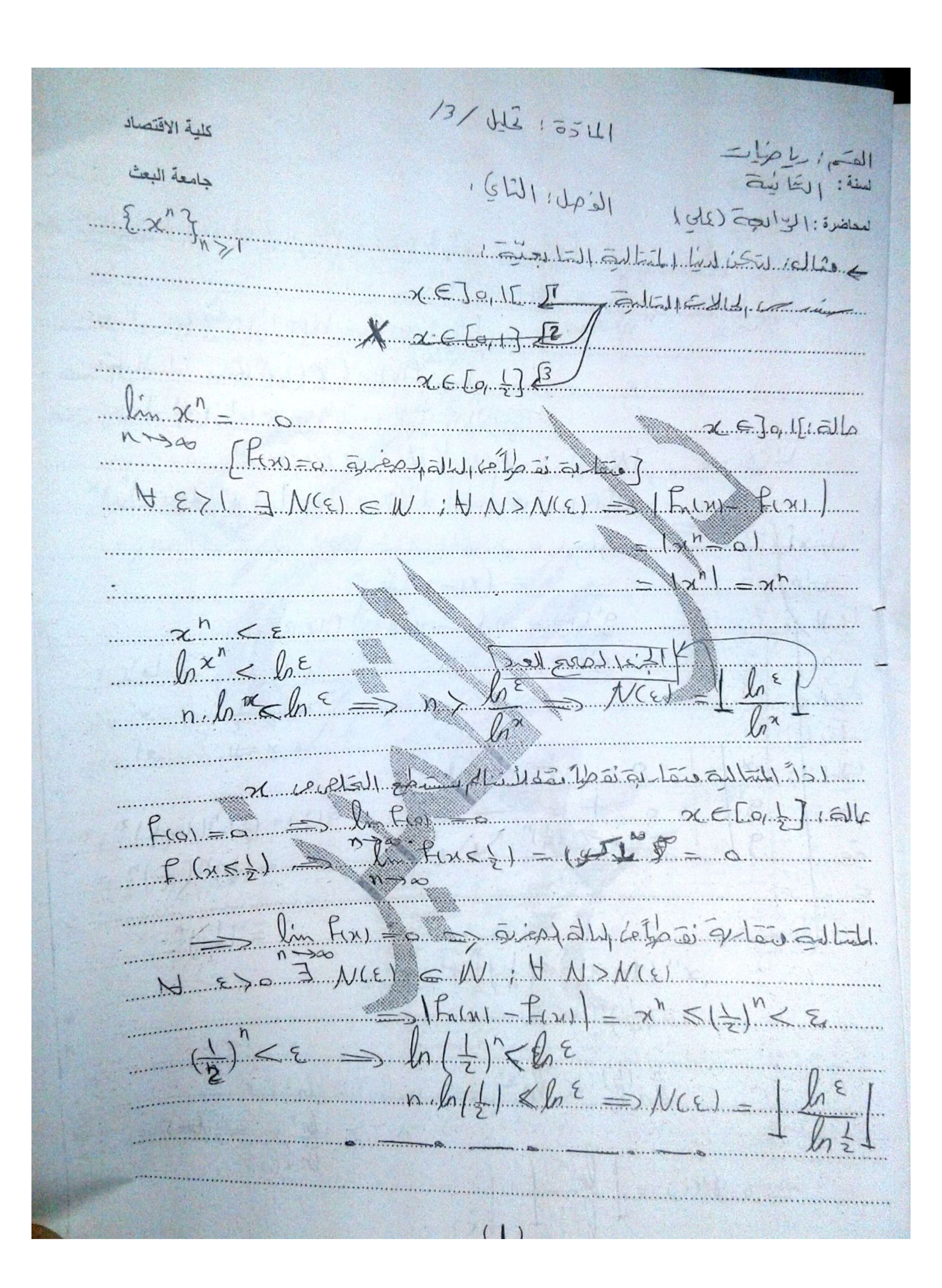
صفرية $\lim a_n = 0$

و لتكن السلسلة $\sum (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $\frac{n(n+1)}{2} \to \infty$

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ -2 \end{cases}$$

سلسلة متقاربة حسب اختبار ديريخليه $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n}$

انتهت المحاضرة



كلية الاقتصاد   المادة: تحليل /3/

جامعة البعث

القسم: رياضيات
السنة: الثانية
الفصل: الثاني
المحاضرة: الرابعة (عملي)

← مثال: لتكن لدينا المتتالية التابعية: $\{x^n\}_{n\geq 1}$

ندرس الحالات التالية:

1. $x \in]0,1[$
2. ~~$x \in [0,1]$~~ ✗
3. $x \in [0,\frac{1}{2}]$

حالة 1: $x \in]0,1[$

$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

[متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية $f(x)=0$]

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \forall N > N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)|$

$= |x^n - 0|$

$= |x^n| = x^n$

$x^n < \varepsilon$

$\ln x^n < \ln \varepsilon$

$n . \ln x < \ln \varepsilon \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \Rightarrow N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \right]$ ← الجزء الصحيح للعدد

إذاً المتتالية متقاربة نقطياً لأننا نستطيع التخلص من x

حالة 3: $x \in [0,\frac{1}{2}]$

$f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(0) = 0$

$f(x \leq \frac{1}{2}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x < \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{\infty} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ المتتالية متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية

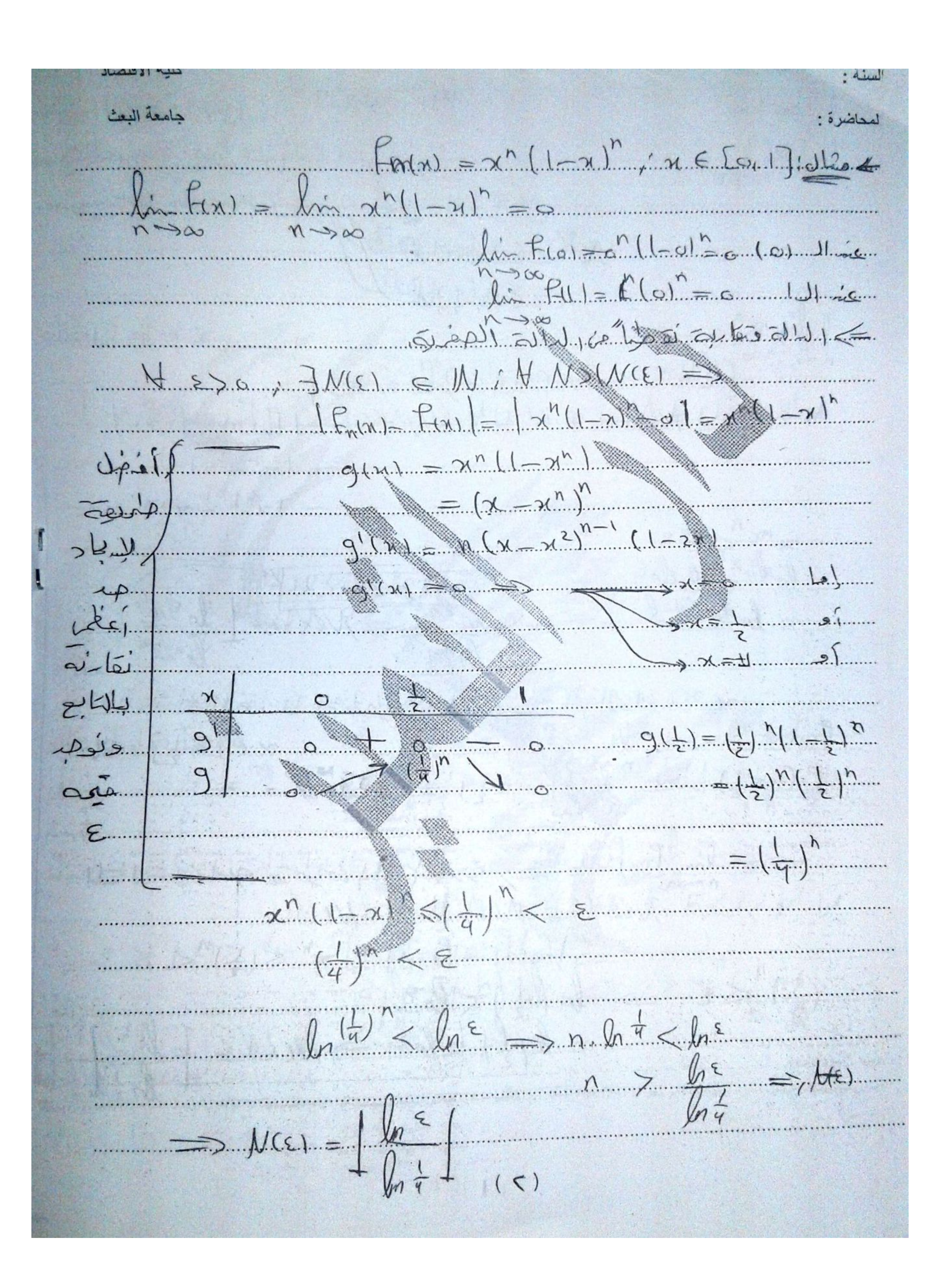
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \forall N > N(\varepsilon)$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = x^n \leq (\frac{1}{2})^n < \varepsilon$

$(\frac{1}{2})^n < \varepsilon \Rightarrow \ln (\frac{1}{2})^n < \ln \varepsilon$

$n . \ln(\frac{1}{2}) < \ln \varepsilon \Rightarrow N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}} \right]$

Scanned by CamScanner



مثال: $f_n(x) = x^n(1-x)^n \; ; \; x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n(1-x)^n = 0$$

عند الـ (0): $\lim_{n\to\infty} f(0) = 0^n(1-0)^n = 0$

عند الـ 1: $\lim_{n\to\infty} f(1) = 1(0)^n = 0$

⟸ الدالة متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية.

$\forall \varepsilon > 0 \; , \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; ; \; \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow$

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n(1-x)^n - 0| = x^n(1-x)^n$$

أفضل طريقة لإيجاد حد أعظم نقارنه بالتابع ونوجد قيمة ε

$$g(x) = x^n(1-x^n)$$
$$= (x - x^n)^n$$
$$g'(x) = n(x-x^2)^{n-1}(1-2x)$$

$g'(x) = 0 \Rightarrow$ إما $x = 0$ أو $x = \frac{1}{2}$ أو $x = 1$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
g'	0	$+$	0	$-$	0
g	0	↗	$(\frac{1}{4})^n$	↘	0

$$g(\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2})^n(1-\tfrac{1}{2})^n$$
$$= (\tfrac{1}{2})^n(\tfrac{1}{2})^n$$
$$= (\tfrac{1}{4})^n$$

$$x^n(1-x)^n \leq (\tfrac{1}{4})^n < \varepsilon$$

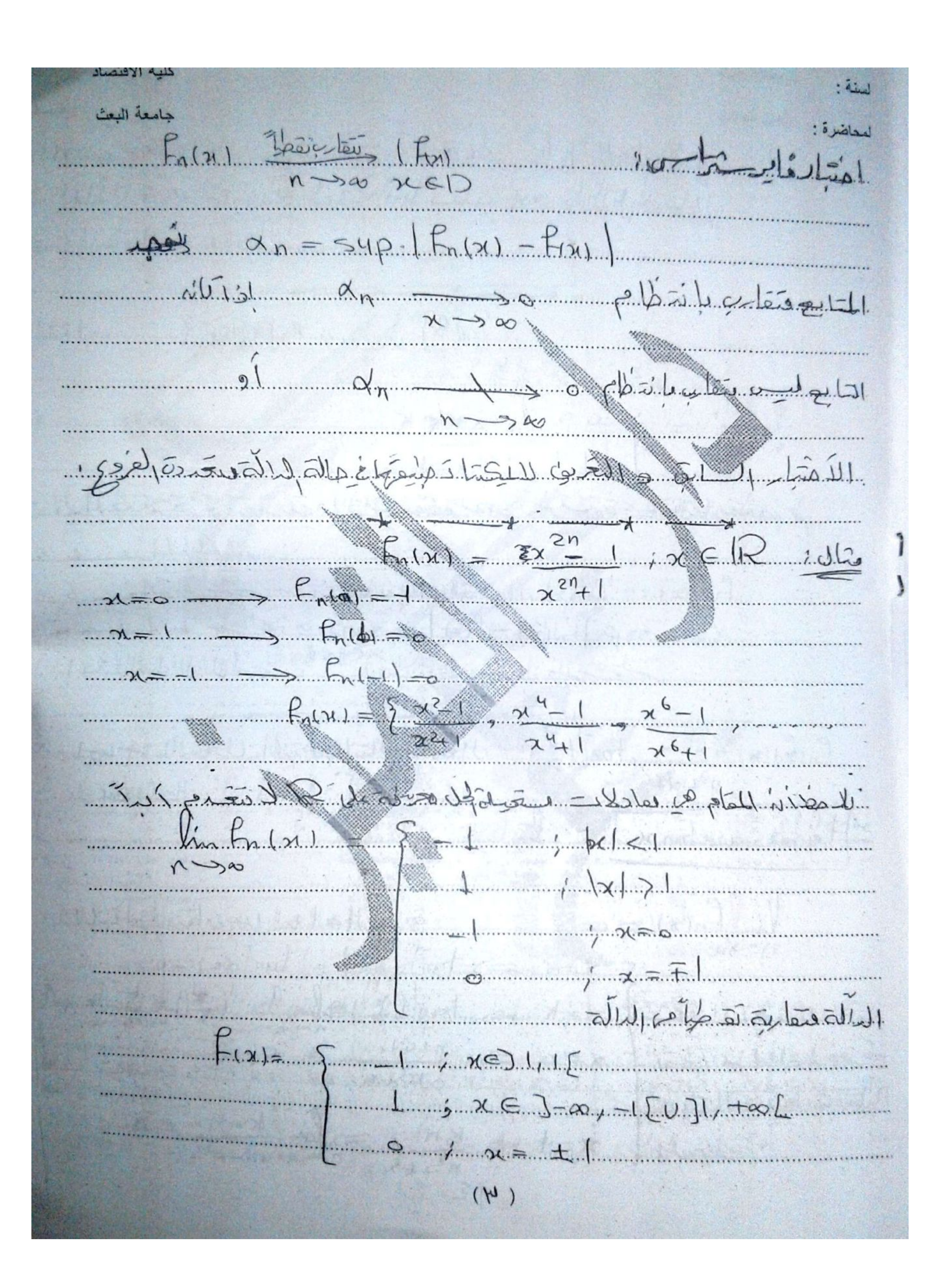
$$(\tfrac{1}{4})^n < \varepsilon$$

$$\ln(\tfrac{1}{4})^n < \ln\varepsilon \Longrightarrow n\ln\tfrac{1}{4} < \ln\varepsilon$$

$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{1}{4}} \Longrightarrow N(\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\frac{1}{4}}\right]$$

(٢)



اختبار فايرستراس: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty,\ x\in D]{\text{تتقارب نقطياً}} f(x)$

نوجد $\alpha_n = \sup |f_n(x) - f(x)|$

المتتابعة تتقارب بانتظام إذا كانت $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

المتتابعة ليس تتقارب بانتظام إذا $\alpha_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

الاختبار السابق هو التعريف للمتتاليات تنطبق في حالة الدالة متعددة الفروع.

مثال: $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\ ;\ x \in \mathbb{R}$

$x=0 \longrightarrow f_n(0) = -1$

$x=1 \longrightarrow f_n(1) = 0$

$x=-1 \longrightarrow f_n(-1) = 0$

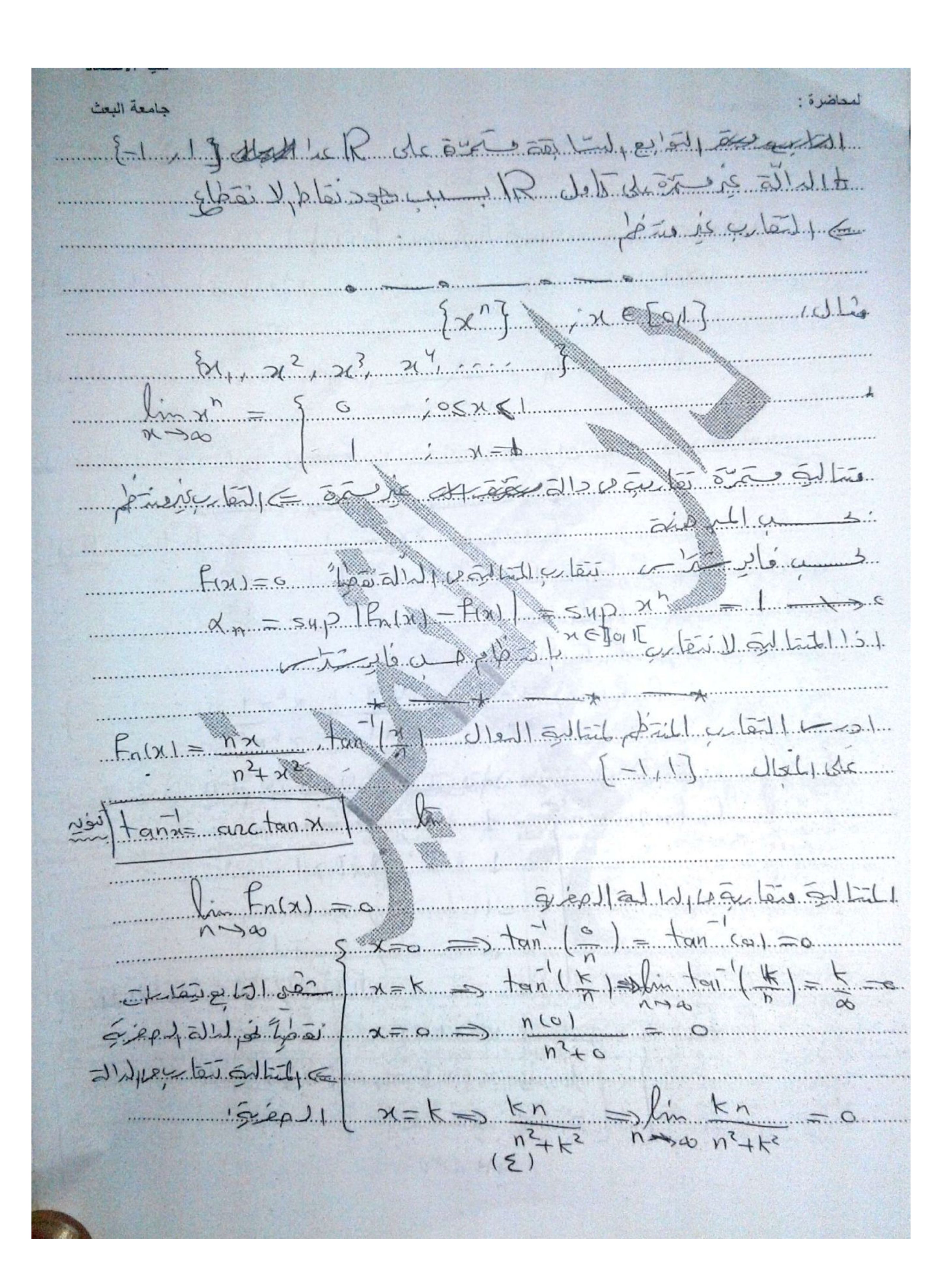
$f_n(x) = \left\{ \dfrac{x^2-1}{x^2+1}, \dfrac{x^4-1}{x^4+1}, \dfrac{x^6-1}{x^6+1}, \dots \right.$

نلاحظ أن المقام هي معادلات مستحيلة الحل معرفة على $\mathbb{R}$ لا تنعدم أبداً.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & ; |x|<1 \\ 1 & ; |x|>1 \\ -1 & ; x=0 \\ 0 & ; x=\mp 1 \end{cases}$$

الدالة متقاربة نقطياً من الدالة

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \in]-1,1[\\ 1 & ; x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ 0 & ; x = \pm 1 \end{cases}$$



المتتالية التوابع السابقة مستمرة على R عدا المجال $]-1,1[$
الدالة غير مستمرة على كامل R بسبب وجود نقاط الانقطاع
⟸ التقارب غير منتظم

مثال: $\{x^n\}$; $x \in [0,1]$

$\{x, x^2, x^3, x^4, \ldots\}$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & ; 0 \le x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

متتالية مستمرة تقاربت من دالة متقطعة غير مستمرة ⟸ التقارب غير منتظم
حسب المبرهنة:
حسب فايرشتراس $f(x) = 0$ تتقارب المتتالية من الدالة نقطياً

$\alpha_n = \sup |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1 \not\to 0$

إذا المتتالية لا تتقارب باستخدام حسب فايرشتراس

——————*———*

ادرس التقارب المنتظم لمتتالية الدوال $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$ ، $\tan^{-1}\left(\frac{x}{n}\right)$
على المجال $[-1,1]$

تنويه: $\tan^{-1} x = \arctan x$

المتتالية متقاربة من الدالة الصفرية $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$x = 0 \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{0}{n}\right) = \tan^{-1}(0) = 0$

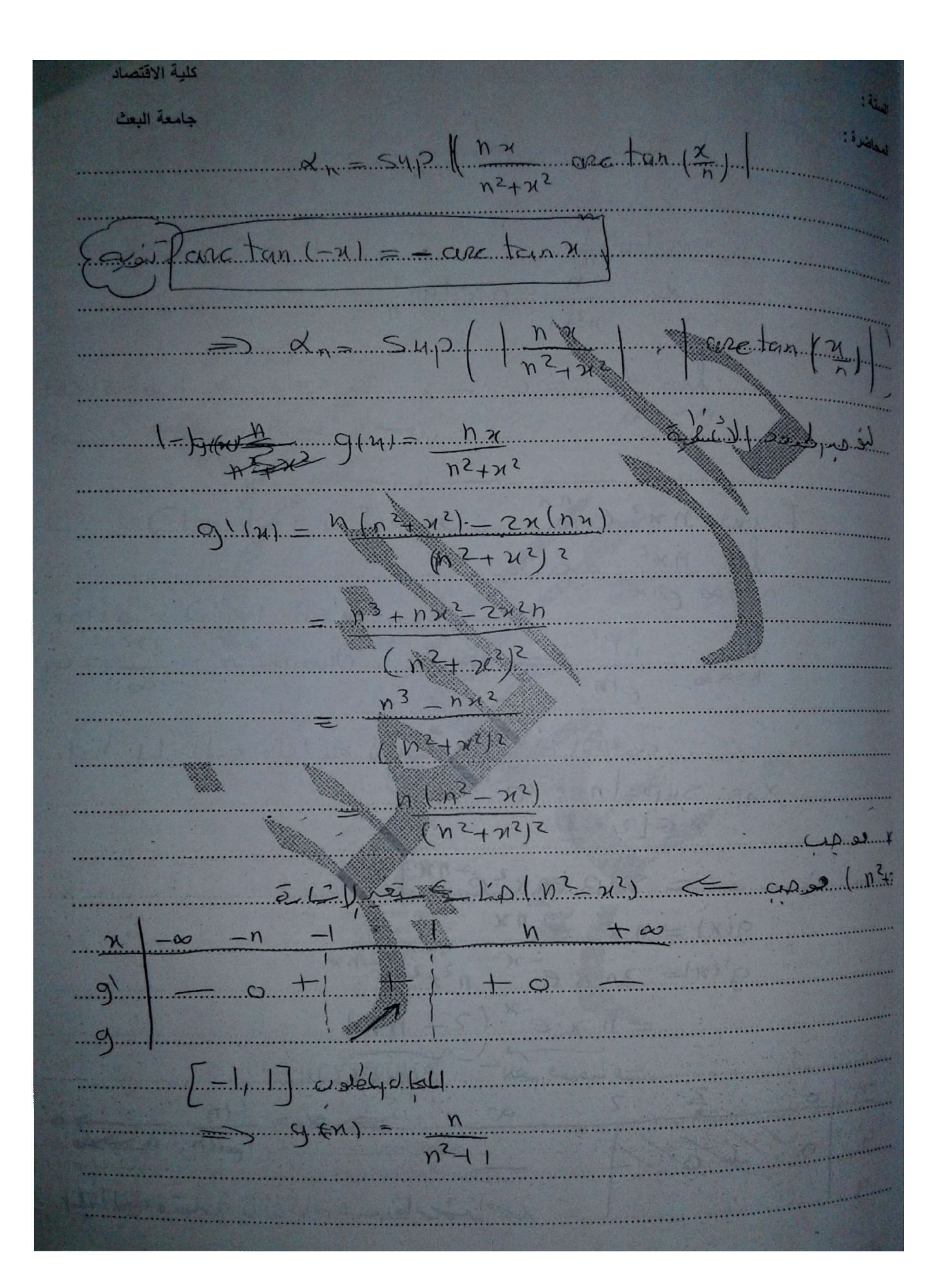
$x = k \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \tan^{-1}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{\infty} = 0$

$x = 0 \Rightarrow \frac{n(0)}{n^2+0} = 0$

$x = k \Rightarrow \frac{kn}{n^2+k^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{kn}{n^2+k^2} = 0$

شقي التابع تتقارب نقطياً من الدالة الصفرية ⟸ المتتالية تتقارب من الدالة الصفرية!

Scanned by CamScanner



كلية الاقتصاد

جامعة البعث

السنة :

المحاضرة :

$$\alpha_n = \sup \left| \frac{nx}{n^2+x^2} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) \right|$$

تذكير : $\arctan(-x) = -\arctan x$

$$\Rightarrow \alpha_n = \sup \left(\left| \frac{nx}{n^2+x^2} \right| , \left| \arctan\left(\frac{x}{n}\right) \right| \right)$$

لنوجد العدد الأعظمية

1- $g(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$

$$g'(x) = \frac{n(n^2+x^2) - 2x(nx)}{(n^2+x^2)^2}$$

$$= \frac{n^3 + nx^2 - 2x^2n}{(n^2+x^2)^2}$$

$$= \frac{n^3 - nx^2}{(n^2+x^2)^2}$$

$$= \frac{n(n^2-x^2)}{(n^2+x^2)^2}$$

x موجب

(n^2+x^2) موجب $\Leftarrow$ هنا (n^2-x^2) يعين الإشارة

x	$-\infty$	$-n$	-1		1	n	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
g				$\nearrow$			

المجال المطلوب $[-1, 1]$

$$\Rightarrow g(n) = \frac{n}{n^2+1}$$

Scanned by CamScanner

$\varphi(x) = \arctan \frac{x}{n} \Rightarrow \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x^2}{n^2}} \not> 1$

$\Rightarrow \varphi(x) = \arctan \frac{1}{n}$ أعلى قيمة له هي 1

$\Rightarrow \alpha_n = \frac{n}{n^2+1} \arctan \frac{1}{n}$

$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0 \Rightarrow$ المتتالية متقاربة بانتظام حسب مبرهنة فايرشتراس.

* ——— * ——— *

$f_n(x) = n x^2 e^{-nx} \; ; \; x \in [2, +\infty[= D$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n x^2}{e^{nx}} = 0$

إذا فرضنا $x = p \; ; \; p \in D$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n p^2}{e^{pn}} = \frac{\infty}{\infty}$ حسب أوبيتال $= \frac{p^2}{\infty} = 0$

إذاً المتتالية متقاربة نقطياً نحو الدالة الصفرية

$\alpha_n = \sup_{x \in [2, \infty[} |n x^2 e^{-nx}|$

$= \sup |n x^2 e^{-nx}|$

$g(x) = n x^2 e^{-nx}$

$g'(x) = 2n x \cdot e^{-x} - n^2 x^2 e^{-nx}$

$= n x \cdot e^{-x} (2 - nx)$

الإشارة موجبة — الحد موجب دائماً

x	0	$\frac{2}{n}$	2	∞
g'	0 +	0		−
g				

$\Rightarrow \alpha_n = \frac{4n}{e^{2n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

المتتالية متقاربة بانتظام حسب فايرشتراس.

Scanned by CamScanner

لتكن لدينا المتتالية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ و $x \in D$ نقول عنها قابلة للمكاملة حداً حداً إذا كانت المتتالية متقاربة بانتظام.

ادرس قابلية مكاملة المتتالية $\{x^n(1-x)^n\}$ على المجال $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} x^n(1-x)^n = 0 \qquad f(x) = 0$$

متقاربة نقطياً

تمرين سابق

$$\alpha_n = \sup_{x\in[0,1]} |x^n(1-x^n) - 0| = \left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

لذا نحصل على النتائج التالية

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n(1-x^n)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

* —— * —— * —— *

لتكن $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$; $x \in D$ نقول عن المتتالية قابلة للاشتقاق حداً حداً (أي أن اشتقاق الحد العام يعطي جميع الحدود) إذا حققت الشروط التالية:

1) يجب أن تكون الدوال معرفة ومستمرة على D

2) يجب أن تكون المتتالية $f_n(x)$ متقاربة بانتظام على D

3) المتتالية الأساسية $\{f_n(x)\}$ متقاربة نقطياً على D

[السؤال الامتحاني: ادرس قابلية الاشتقاق؟]

• —— • —— • —— •

مثال: $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ $x \in [1,+\infty[$

$$f_n(x) = \left\{ \frac{x}{1+x}, \frac{2x}{1+2x}, \ldots \right\}$$

جميع الدوال معرفة ومستمرة على المجال $]1,+\infty[$

المتتالية متقاربة نقطياً من الدالة $f(x)=1$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ $x \in [1,+\infty[$

كلية الاقتصاد

جامعة البعث

السنة : الثانية

المحاضرة :

لا نحتاج لدراسة التقارب المنتظم

$$f'_n(x) = \frac{n(1+nx) - n^2x}{(1+nx)^2} = \frac{n}{(1+nx)^2}$$

من متتالية المشتقات

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{(1+nx)^2} = 0 \quad f(x) = 0$$

متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية

(درجة متغير البسط أصغر من درجة متغير المقام)

باستخدام الشرط الكافي

$$\alpha_n = \sup_{x \in [d, \infty[} \left| \frac{n}{(1+nx)^2} \right| = \frac{n}{(1+n)^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

أعظم قيمة عند 1 تكون أعظمية

$$\lim_{n \to \infty} f'_n(x) = \left(\lim_{n \to \infty} f(x) \right)'$$

⟸ التقارب منتظم ⟸

(ادخال النهاية على المشتق)

* ——— * ——— * ——— *

ادرس التقارب المنتظم $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$f_n(x) = \frac{2n^2x}{1+n^5x^2} \ ; \ x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right]$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

الحل $f_n(x)$ متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية $f(x) = 0$

لندرس التقارب المنتظم:

$$\alpha_n = \sup_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} \left| \frac{2n^2x}{1+n^5x^2} \right|$$

نضع $g_n(x) = \frac{2n^2x}{1+n^5x^2}$ ⟸

$$g'_n(x) = \frac{2n^2(1-n^5x^2)}{(1+n^5x^2)^2}$$

نجعل $g'_n(x) = 0$ ⟸

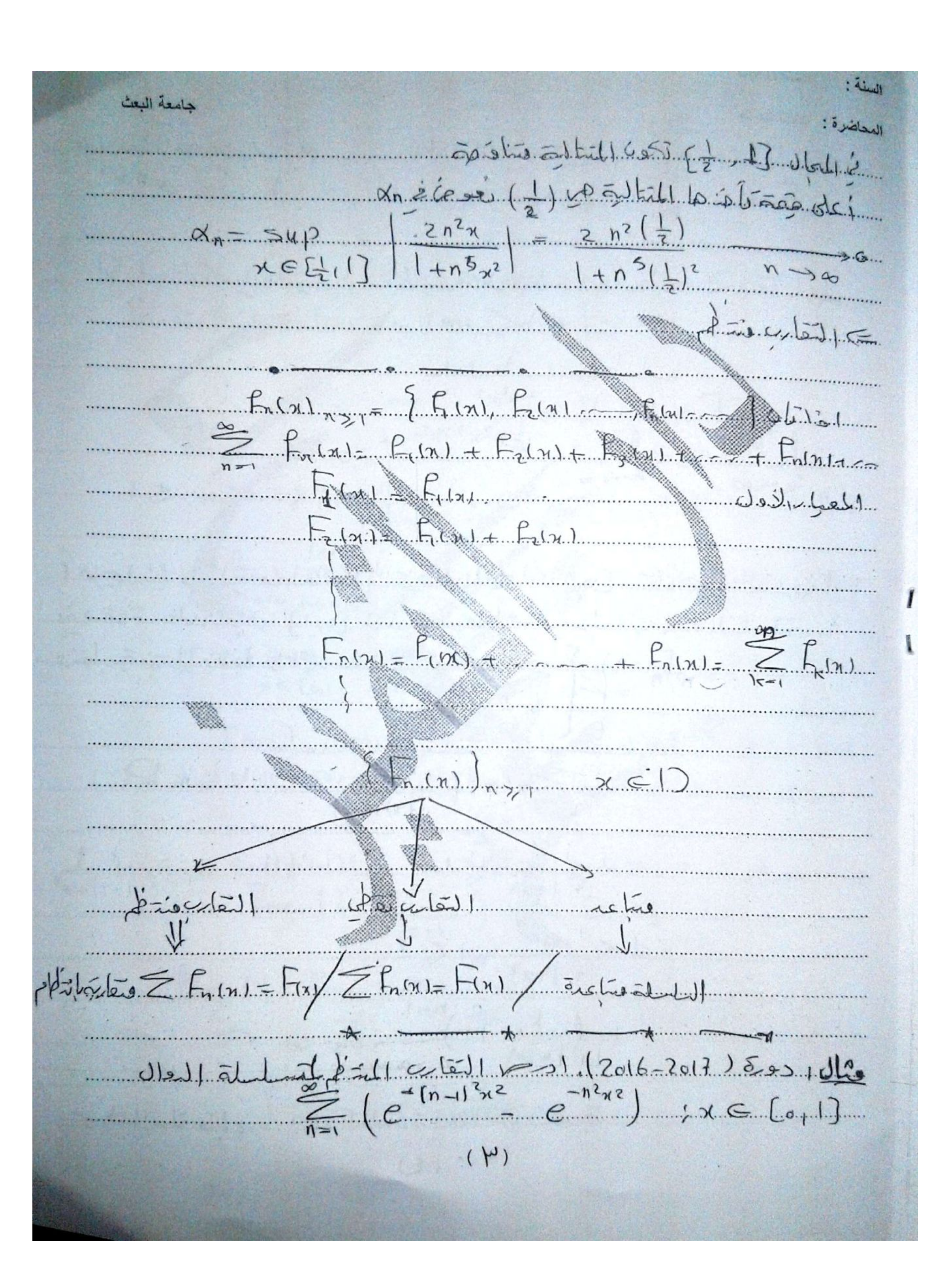
$$x = \pm \frac{1}{n^{5/2}}$$

x	$-\frac{1}{n^{5/2}}$		$\frac{1}{n^{5/2}}$	$\frac{1}{2}$	1	∞
$g'_n(x)$	0	+	0	−	−	
$g_n(x)$		↗		↘	↘	

متناقصة

اذا وضعنا $n=1$ سيكون الـ $\frac{1}{2}$ قبل $\frac{1}{n^{5/2}}$ ولكن باقي القيم ستكون $\frac{1}{2}$ بعد $\frac{1}{n^{5/2}}$ لذا

نحذف (1) ونأخذ الحالة العامة (c)



في المجال $[\frac{1}{2}, 1]$ تكون المتتالية متناقصة

أعلى قيمة تأخذها المتتالية هي $(\frac{1}{2})$ نعوض في α_n

$$\alpha_n = \sup_{x\in[\frac{1}{2},1]} \left|\frac{2n^2x}{1+n^5x^2}\right| = \frac{2n^2(\frac{1}{2})}{1+n^5(\frac{1}{2})^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

بالتالي التقارب منتظم

المتتاليات $f_n(x)_{n\geq 1} = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

المجاميع الأولى

$F_1(x) = f_1(x)$

$F_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$\vdots$

$F_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

$\{F_n(x)\}_{n\geq 1} \quad x \in I$

التقارب منتظم ⇓ $\sum f_n(x) = F(x)$ متقاربة بانتظام /

التقارب نقطي ↓ $\sum f_n(x) = F(x)$ /

متباعد ↓ السلسلة متباعدة

مثال: دورة (2016-2017) ادرس التقارب المنتظم لسلسلة التوابع

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2}\right) \; ; x \in [0,1]$$

هي متتالية من الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}(x) - b_n(x)$

$b_n(x) = e^{-n^2x^2}$

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}(x) - b_k(x)$$

$$= b_0(x) - b_1(x) + b_1(x) - b_2(x) + b_2(x) - \dots + b_{n-1}(x) - b_n(x)$$

$$= b_0(x) - b_n(x)$$

$$F_n(x) = 1 - e^{-n^2x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 - e^{-n^2x^2} = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ 1 & ; 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

أصبح لدينا متتالية من التوابع المستمرة على المجال $[0,1]$ تقاربت من دالة $F_n(x)$ غير مستمرة على المجال $[0,1]$ لأنها غير مستمرة عند الـ $0 \Leftarrow$ السلسلة متقاربة نقطياً ومجموعها

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ 1 & ; 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1} \quad ; \forall x \in \mathbb{R}$$

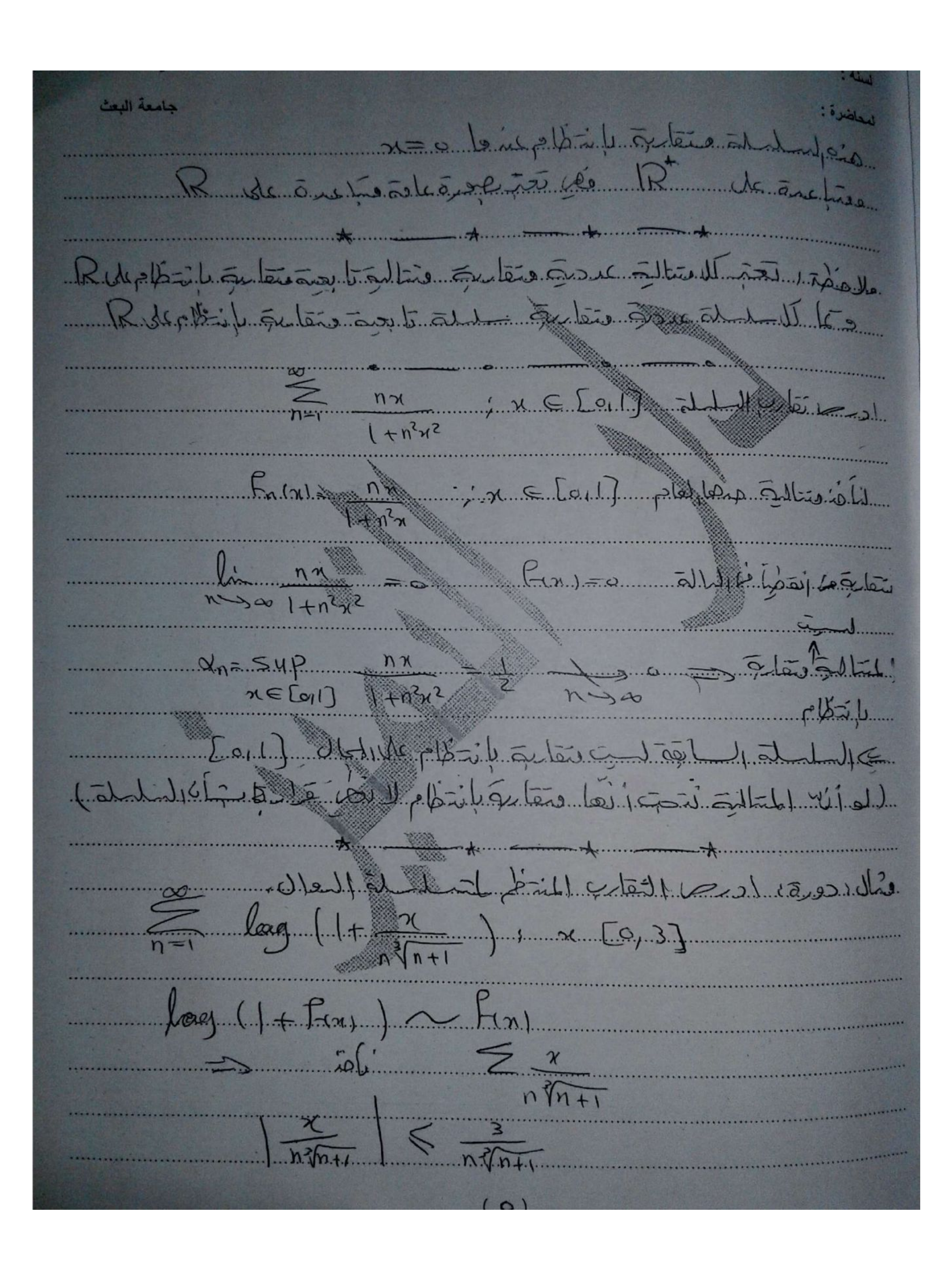
$\frac{1}{1+x^2}$ أعظم قيمة له هي (1)

$$0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

$$1 < \frac{1}{1+x^2} + 1 \leq 2$$

$$\left(\frac{1}{1+x^2} + 1\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$\Leftarrow$ السلسلة متباعدة عدا النقطة (0) هي متقاربة



هذه السلسلة متقاربة بانتظام عندما $x = 0$

متباعدة على $\mathbb{R}^*$ فهي تعتبر متقاربة بصورة عادية ومتباعدة على $\mathbb{R}$

* ——— * ——— * ——— *

ملاحظة : تعتبر كل متتالية عددية متقاربة متتالية تابعية متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$

وكما كل سلسلة عددية متقاربة سلسلة تابعية متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$

· ——— · ——— · ——— ·

ادرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}$; $x \in [0,1]$

لنأخذ متتالية حدها العام $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$; $x \in [0,1]$

متقاربة من النقطة في الحالة $\lim_{n \to \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$ $f(x) = 0$

$\alpha_n = \sup_{x \in [0,1]} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2} \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0 \Rightarrow$ المتتالية ليست متقاربة بانتظام

السلسلة السابقة ليست متقاربة بانتظام على المجال $[0,1]$

(لو أن المتتالية تتجه إلى الصفر بانتظام لا يعني أن السلسلة متقاربة بانتظام)

* ——— * ——— * ——— *

مثال (دورة) : ادرس التقارب المنتظم لسلسلة التوابع

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right) \; ; \; x \in [0,3]$$

$$\log(1 + f(x)) \sim f(x)$$

$\Rightarrow$ نأخذ $\sum \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}$

$$\left| \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}} \right| \leqslant \frac{3}{n\sqrt[3]{n+1}}$$

السنة :   كلية الاقتصاد

المحاضرة :   جامعة البعث

$$\left|\frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right| \leq \frac{3}{n\sqrt[3]{n+1}}$$

$$\sum \frac{3}{n\sqrt[3]{n+1}} \qquad \sum \frac{1}{n^{4/3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$\sum \frac{1}{n\sqrt[3]{n+1}} \leq \sum \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{4/3}}$$

حسب اختبار فايرشتراس السلسلة متقاربة $\frac{1}{n^{4/3}}$ ومتقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ (سلسلة ريمان $4/3 > 1$) ـب وكما فيشر متقاربة بانتظام

$\frac{1}{n\sqrt[3]{n+1}}$ متقاربة بانتظام

انتهت المحاضرة